詳細解答

STEP III 2024，第 2 題

純數學 • 不等式與絕對值

STEP III 2024，第 2 題

繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 OCR 提供下載的 2024 年 STEP 試卷（zip 檔案）內的 STEP III 試卷：

www.ocr.org.uk/Images/725753-2024-past-papers.zip

關鍵思路

本題中每個平方根（square root）內的式子都是恆為正的二次式（quadratic），而且每條不等式（inequality）的兩邊都是非負的，所以我們可以兩邊平方而不改變解集（solution set）。平方之後，每個問題都變成關於某個二次式正負號的命題（或者當 x^2 項互相抵消時，變成關於一個線性函數（linear function）的命題）。從幾何角度看，$y = \sqrt{4x^2 - 8x + 64}$ 是一條雙曲線（hyperbola）的上半部分，而題目中的直線則是它的弦（chord）和漸近線（asymptote）。

解答

第 (i) 部分

配方（completing the square）得 $4x^2 - 8x + 64 = 4(x-1)^2 + 60 > 0$，所以平方根對所有 x 都有定義。每條不等式的兩邊都是非負的，而對於 $A, B \geq 0$，我們有 $A \leq B \iff A^2 \leq B^2$。

(a) 兩邊平方，

$$\begin{aligned} 4x^2 - 8x + 64 \leq x^2 + 16x + 64 &\iff 3x^2 - 24x \leq 0 \\ &\iff 3x(x-8) \leq 0 \iff 0 \leq x \leq 8. \end{aligned}$$

(b) 兩邊平方，

$$\begin{aligned} 4x^2 - 8x + 64 \leq 9x^2 - 48x + 64 &\iff 0 \leq 5x^2 - 40x \\ &\iff 5x(x-8) \geq 0 \iff x \leq 0 \text{ 或 } x \geq 8. \end{aligned}$$

在兩部分中，等號都在 $x = 0$（各邊均等於 8）和 $x = 8$（各邊均等於 16）時成立。

第 (ii) 部分

(a) 利用平方差（difference of two squares），

$$\left(\sqrt{4x^2 - 8x + 64} + 2(x-1)\right)\mathrm{f}(x) = (4x^2 - 8x + 64) - 4(x-1)^2 = 60.$$

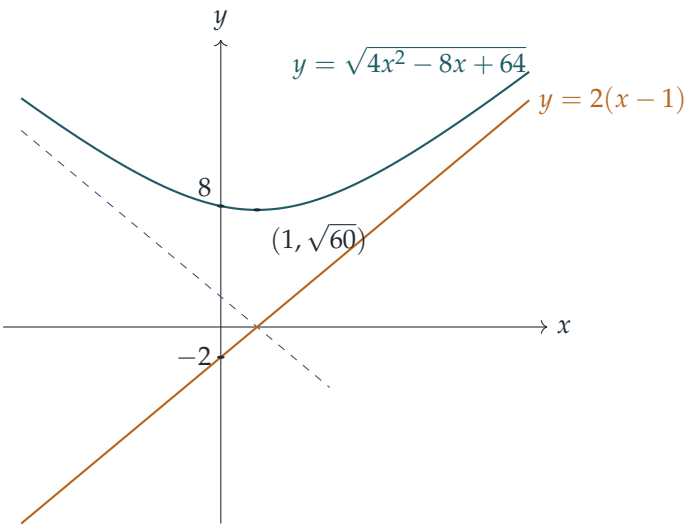
當 $x > 1$ 時，括號內的式子為正，所以可以相除：

$$\mathrm{f}(x) = \frac{60}{\sqrt{4x^2 - 8x + 64} + 2(x-1)}.$$

當 $x \to \infty$ 時，分母至少為 $2(x-1)$，而它趨向無窮大，所以 $\mathrm{f}(x) \to 0$，正如所求。

(b) 設 $y = \sqrt{4(x-1)^2 + 60}$。那麼 $y > 0$ 且 $y^2 - 4(x-1)^2 = 60$，所以這條曲線是一條以 $(1, 0)$ 為中心的雙曲線的上支。它關於 $x = 1$ 對稱，在 $x = 1$ 處取最小值 $\sqrt{60} = 2\sqrt{15} \approx 7.75$，並與 y 軸相交於 $(0, 8)$。

由於 $y > \sqrt{4(x-1)^2} = 2|x-1|$，曲線嚴格位於兩條直線 $y = \pm 2(x-1)$ 的上方。(a) 部分說明當 $x \to \infty$ 時，曲線趨近 $y = 2(x-1)$。由關於 $x = 1$ 的對稱性，當 $x \to -\infty$ 時，曲線趨近 $y = -2(x-1)$。直線 $y = 2(x-1)$ 的斜率（gradient）為 2，並經過 $(1, 0)$ 和 $(0, -2)$。



虛線是另一條漸近線 $y = -2(x-1)$。

第 (iii) 部分

同樣地，$4x^2-5x+4=4(x-\frac{5}{8})^2+\frac{39}{16}>0$，所以平方根總是有定義。把（非負的）兩邊平方，該不等式等價於

$$(m^2-4)x^2+(2mc+5)x+(c^2-4)\geq 0. \qquad (*)$$

想一想 $(*)$ 左邊是甚麼類型的式子，才可能恰好在 $x\geq 3$ 時非負？

若 $m^2-4>0$，當 $x\to-\infty$ 時左邊趨向 $+\infty$，於是非常負的 x 也會滿足 $(*)$。若 $m^2-4<0$，當 $x\to+\infty$ 時左邊趨向 $-\infty$，於是很大的 x 會不滿足。兩者都不容許，所以 $m^2=4$，而 $(*)$ 變成線性不等式。線性不等式 $ax+b\geq 0$ 的解集為 $\{x:x\geq 3\}$，當且僅當 $a>0$ 且 $3a+b=0$。

取 $m=2$。那麼 $a=4c+5$，$b=c^2-4$，所以我們需要

$$3(4c+5)+c^2-4=c^2+12c+11=(c+1)(c+11)=0, \qquad 4c+5>0.$$

根 $c=-11$ 給出 $a=-39<0$，不符合。根 $c=-1$ 給出 $a=1>0$。所以

$$m=2, \qquad c=-1$$

可行。驗證一下：$(2x-1)^2-(4x^2-5x+4)=x-3$，它恰好在 $x\geq 3$ 時非負。（取 $m=-2$、$c=1$ 會得到相同的 $|mx+c|$，同樣成立。）

第 (iv) 部分

設 $g(x)=x^2+px+q$，$L(x)=mx+c$。由於 $|g|\leq L \iff -L\leq g\leq L$，該不等式成立當且僅當以下兩者同時成立：

$$g(x)-L(x)\leq 0 \qquad 及 \qquad g(x)+L(x)\geq 0.$$

$g-L$ 和 $g+L$ 都是首項係數（leading coefficient）為 1 的二次式。

- 使 $g-L\leq 0$ 的集合是一個閉區間 $[a,b]$（可能是空集或單一點）。
- 使 $g+L\geq 0$ 的集合是全體實數除去一個開區間 (r,s)。若 $g+L$ 沒有實根，則甚麼都不用除去。

所以解集是 $[a,b]$ 除去 (r,s)。要使它等於 $[-5,1]\cup[5,7]$，我們需要 $a=-5$ 及 $b=7$（外側兩端），而被除去的空隙必須恰好是 $(1,5)$，所以 $r=1$，$s=5$。因此

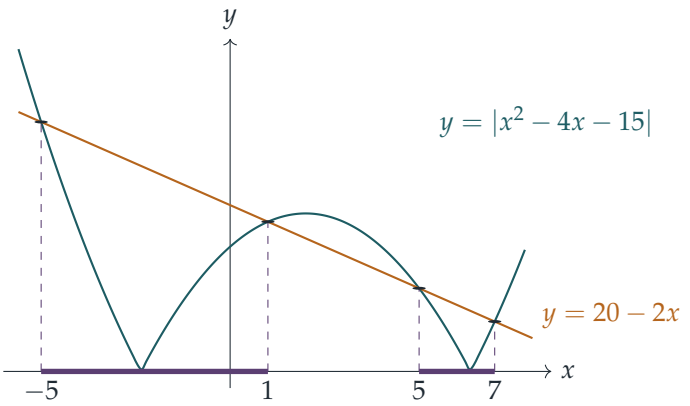
$$g(x)-L(x)=(x+5)(x-7)=x^2-2x-35,$$
$$g(x)+L(x)=(x-1)(x-5)=x^2-6x+5.$$

兩式相加再除以二，得 $g(x) = x^2 - 4x - 15$。兩式相減再除以二，得 $L(x) = -2x + 20$。因此

$$p = -4, \qquad q = -15, \qquad m = -2, \qquad c = 20.$$

以上每一步都是可逆的，所以取這些值時，解集確實是 $[-5,1] \cup [5,7]$：我們需要 $(x+5)(x-7) \le 0$ 及 $(x-1)(x-5) \ge 0$。這些值也是唯一可行的值。

在圖中，g 的根為 $2 \pm \sqrt{19} \approx -2.36,\ 6.36$。直線 $y = 20 - 2x$ 在 $x = -5$ 和 $x = 7$ 處與 $|g|$ 的外側兩臂相交，並在 $x = 1$ 和 $x = 5$ 處穿過被反射上來的拱形部分。



驗算

- 在 (ii)(a) 中，當 $x = 100$ 時，$\mathrm{f}(100) = \sqrt{39264} - 198 \approx 0.151$，與 $60/(\sqrt{39264} + 198) \approx 0.151$ 吻合。
- 在 (iv) 中，當 $x = 0$ 時：$|-15| = 15 \le 20$，所以 0 是解。當 $x = 3$ 時：$|9 - 12 - 15| = 18 > 14$，所以 3 不是解。當 $x = 8$ 時：$|64 - 32 - 15| = 17 > 4$，所以 8 不是解。這些都與 $[-5,1] \cup [5,7]$ 相符。用電腦在 x 的細密網格上檢查，亦確認了全部四個解集。

常見錯誤

- 兩邊平方卻沒有說明為何可以這樣做。這裏之所以成立，只因為兩邊都是非負的。
- 在 (iii) 中保留真正的二次式。二次不等式的解集不可能是單側的半直線，所以 x^2 項必須抵消。
- 在 (iv) 中把端點配對錯了：外側兩端 $-5, 7$ 屬於 $g - L$，而內側兩端 $1, 5$（即空隙）屬於 $g + L$。

STEP 之外

曲線 $y^2 - 4(x-1)^2 = 60$ 是一條雙曲線，而第 (ii) 部分展示了如何求漸近線：把曲線與候選直線之差有理化（rationalise）。同樣的技巧——乘以「共軛式」（conjugate）——是大學一年級分析（analysis）中求極限的標準工具。像 (iv) 那樣把 $|g| \leq L$ 寫成兩個單側條件，正是那裏處理含絕對值（absolute value）不等式的慣常做法。Abbott 的 *Understanding Analysis*（《理解分析》）是很好的下一步讀物。

Beyond STEP 詳細解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hant/。解答文字採用 CC0 1.0；題目本身版權屬 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予轉載。由機器從英文翻譯而成；尚未經審閱。