詳細解答

STEP III 2024，第 12 題

概率與統計 • 幾何概率

> **STEP III 2024，第 12 題**
>
> 繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 OCR 提供下載的 2024 年 STEP 試卷（zip 檔案）內的 STEP III 試卷：
>
> www.ocr.org.uk/Images/725753-2024-past-papers.zip

關鍵思路

若在單位正方形（unit square）內均勻（uniformly）隨機選取一點，則 $\mathrm{P}(R \le r)$ 正是正方形內落在以原點為圓心、半徑為 r 的圓之內那部分的面積。當 $r > 1$ 時，圓會從正方形的兩條邊突出，而留在正方形內的區域可以整齊地分拆為兩個直角三角形和一個扇形（sector）。至於期望值（expectation），先求導得出概率密度函數（density），再對 $rf(r)$ 積分；用一次分部積分（integration by parts）便能消去麻煩的 $\cos^{-1}$ 項，最後以雙曲代換（hyperbolic substitution）完成計算。

解答

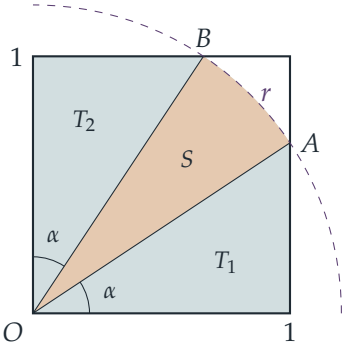
第 (i) 部分

由於概率等於面積，$\mathrm{P}(R \le r)$ 就是正方形內與 O 的距離不超過 r 的點所組成集合的面積。

當 $0 \le r \le 1$ 時，四分之一圓盤 $x, y \ge 0$，$x^2 + y^2 \le r^2$ 完全位於正方形之內，因此

$$\mathrm{P}(R \le r) = \tfrac{1}{4}\pi r^2 \qquad (0 \le r \le 1).$$

當 $1 \le r \le \sqrt{2}$ 時，圓 $x^2 + y^2 = r^2$ 與邊 $x = 1$ 相交於 $A = (1, \sqrt{r^2 - 1})$，與邊 $y = 1$ 相交於 $B = (\sqrt{r^2 - 1}, 1)$；由於 $0 \le \sqrt{r^2 - 1} \le 1$，這兩點都在正方形上。設 α 為 OA 與 x 軸所成的角，則 $\cos\alpha = 1/r$，即 $\alpha = \cos^{-1}(r^{-1})$。由於圖形關於 $y = x$ 對稱，OB 與 y 軸所成的角同樣是 α。



正方形內位於圓內的部分由以下各部分組成：

- 頂點為 O、$(1,0)$、A 的三角形 T_1：直角位於 $(1,0)$，兩條直角邊分別為 1 和 $\sqrt{r^2-1}$，故面積為 $\frac{1}{2}\sqrt{r^2-1}$；
- 頂點為 O、$(0,1)$、B 的三角形 T_2：它是 T_1 的鏡像，面積同樣是 $\frac{1}{2}\sqrt{r^2-1}$；
- 介於 OA 與 OB 之間、半徑為 r 的扇形 S，其圓心角為 $\frac{\pi}{2}-2\alpha$，故面積為 $\frac{1}{2}r^2\left(\frac{\pi}{2}-2\alpha\right)=\frac{1}{4}\pi r^2-r^2\alpha$。

相加得

$$\mathrm{P}(R\le r)=\sqrt{r^2-1}+\tfrac{1}{4}\pi r^2-r^2\cos^{-1}(r^{-1})\qquad(1\le r\le\sqrt{2}),$$

此即所求。（在 $r=1$ 時，兩條公式都給出 $\frac{1}{4}\pi$；而在 $r=\sqrt{2}$ 時，我們得到 $1+\frac{1}{2}\pi-2\cdot\frac{\pi}{4}=1$，正如所料。）

第 (ii) 部分

記 $F(r)=\mathrm{P}(R\le r)$，並以 $f=F'$ 表示概率密度函數。在 $0<r<1$ 上，$f(r)=\frac{1}{2}\pi r$。在 $1<r<\sqrt{2}$ 上，我們需要

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\cos^{-1}(r^{-1})=-\frac{1}{\sqrt{1-r^{-2}}}\cdot\left(-\frac{1}{r^2}\right)=\frac{1}{r\sqrt{r^2-1}},$$

這裏用了當 $r>0$ 時 $\sqrt{1-r^{-2}}=\sqrt{r^2-1}/r$。於是由乘積法則（product rule），

$$\begin{aligned}f(r)&=\frac{r}{\sqrt{r^2-1}}+\tfrac{1}{2}\pi r-\left(2r\cos^{-1}(r^{-1})+\frac{r^2}{r\sqrt{r^2-1}}\right)\\&=\tfrac{1}{2}\pi r-2r\cos^{-1}(r^{-1}).\end{aligned}$$

兩個 $\dfrac{r}{\sqrt{r^2-1}}$ 項互相抵消，這是個好兆頭。因此

$$\begin{aligned}\mathrm{E}(R)&=\int_0^{\sqrt{2}}rf(r)\,\mathrm{d}r=\int_0^{\sqrt{2}}\tfrac{1}{2}\pi r^2\,\mathrm{d}r-2\int_1^{\sqrt{2}}r^2\cos^{-1}(r^{-1})\,\mathrm{d}r\\&=\frac{\pi(\sqrt{2})^3}{6}-2I=\frac{\sqrt{2}\,\pi}{3}-2I,\end{aligned}$$

其中 $I = \displaystyle\int_1^{\sqrt{2}} r^2 \cos^{-1}(r^{-1})\,\mathrm{d}r$。

想一想 怎樣才能消去 I 裏面的反餘弦？

進行分部積分，對 $\cos^{-1}(r^{-1})$ 求導（上面已求得它的導數是代數式），並對 r^2 積分：

$$\begin{aligned} I &= \left[\tfrac{1}{3}r^3\cos^{-1}(r^{-1})\right]_1^{\sqrt{2}} - \int_1^{\sqrt{2}} \frac{r^3}{3}\cdot\frac{1}{r\sqrt{r^2-1}}\,\mathrm{d}r \\ &= \tfrac{1}{3}\cdot 2\sqrt{2}\cdot\frac{\pi}{4} - 0 - \frac{1}{3}\int_1^{\sqrt{2}} \frac{r^2}{\sqrt{r^2-1}}\,\mathrm{d}r, \end{aligned}$$

這裏用了 $\cos^{-1}(1/\sqrt{2}) = \frac{\pi}{4}$ 及 $\cos^{-1}1 = 0$。（被積函數在 $r=1$ 處無界，但在該處它的表現與 $1/\sqrt{2(r-1)}$ 相若，所以積分收斂（converges）。）因此

$$\mathrm{E}(R) = \frac{\sqrt{2}\,\pi}{3} - \frac{\sqrt{2}\,\pi}{3} + \frac{2}{3}\int_1^{\sqrt{2}} \frac{r^2}{\sqrt{r^2-1}}\,\mathrm{d}r = \frac{2}{3}\int_1^{\sqrt{2}} \frac{r^2}{\sqrt{r^2-1}}\,\mathrm{d}r,$$

此即所求結果。

第 (iii) 部分

$\sqrt{r^2-1}$ 提示我們設 $r = \cosh t$，則 $\mathrm{d}r = \sinh t\,\mathrm{d}t$，且 $\sqrt{r^2-1} = \sinh t$（因為 $t \geq 0$）。積分上下限變為 $t = 0$ 和 $t = T$，其中 $\cosh T = \sqrt{2}$，所以 $\sinh T = 1$，且

$$T = \cosh^{-1}\sqrt{2} = \ln\bigl(\sqrt{2}+\sqrt{2-1}\bigr) = \ln\bigl(\sqrt{2}+1\bigr).$$

於是

$$\begin{aligned} \int_1^{\sqrt{2}} \frac{r^2}{\sqrt{r^2-1}}\,\mathrm{d}r &= \int_0^T \frac{\cosh^2 t}{\sinh t}\,\sinh t\,\mathrm{d}t = \int_0^T \tfrac{1}{2}(1+\cosh 2t)\,\mathrm{d}t \\ &= \left[\tfrac{1}{2}t + \tfrac{1}{2}\sinh t\cosh t\right]_0^T = \tfrac{1}{2}\ln\bigl(\sqrt{2}+1\bigr) + \tfrac{1}{2}\cdot 1\cdot\sqrt{2}. \end{aligned}$$

乘以 $\frac{2}{3}$，得

$$\mathrm{E}(R) = \tfrac{1}{3}\Bigl(\sqrt{2} + \ln\bigl(\sqrt{2}+1\bigr)\Bigr),$$

此即所求。

驗算

- F 在 $r=1$ 處連續（兩段公式都給出 $\frac{\pi}{4} \approx 0.785$），並在 $r=\sqrt{2}$（即最遠的那個角）處達到 1。
- 概率密度函數 $\frac{1}{2}\pi r - 2r\cos^{-1}(r^{-1})$ 在 $r=\sqrt{2}$ 處等於零，理應如此：只有那唯一的角點才有這麼遠。

- 數值上，$\mathrm{E}(R) = \frac{1}{3}(1.41421 + 0.88137) \approx 0.7652$，合理地介於 $\frac{1}{2}$ 與 $\sqrt{2}$ 之間。以電腦模擬 4×10^5 個隨機點，得到的平均距離約為 0.766，而其經驗分佈函數（empirical distribution function）在多個 r 值上與 F 的差距都在 0.002 以內。

常見錯誤

- 把扇形的圓心角當成 $\frac{\pi}{2} - \alpha$ 而非 $\frac{\pi}{2} - 2\alpha$：在兩條邊的每一條都切出了一個三角形。
- 弄錯 $\cos^{-1}(r^{-1})$ 導數的正負號：兩個負號（分別來自 $\cos^{-1}$ 和 r^{-1}）互相抵消，所以導數是正的。

STEP 之外

這是幾何概率（geometric probability）的初體驗：由單位正方形的一個角到正方形內隨機一點的平均距離。與之相關的問題——單位正方形內兩個隨機點之間的平均距離——有一個類似但更複雜、含有 $\ln(1+\sqrt{2})$ 的閉合形式，是二重積分（double integrals）與變量代換（change of variables）的經典練習。Grimmett 與 Welsh 所著的 *Probability: An Introduction*（《概率導論》）介紹了由幾何定義的分佈，以及如何由分佈函數（distribution function）計算期望值。

Beyond STEP 詳細解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hant/。解答文字採用 CC0 1.0；題目本身版權屬 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予轉載。由機器從英文翻譯而成；尚未經審閱。