詳細解答

STEP III 2024，第 11 題

概率與統計 • 二項分佈的期望值

STEP III 2024，第 11 題

繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 OCR 提供下載的 2024 年 STEP 試卷（zip 檔案）內的 STEP III 試卷：

www.ocr.org.uk/Images/725753-2024-past-papers.zip

關鍵思路

第 (i) 部分的恆等式（identity）把和式下半部分的每一項 $r\binom{2n}{r}$ 與上半部分的一項配對起來。這種對稱性（symmetry）正是處理 X 所需要的：正面與反面次數中較大者，不是正面的次數，就是反面的次數；把正面和反面的角色互換，便能把期望值（expectation）摺疊到和式的上半部分。之後，第 (iii) 部分只是一個比值檢驗（ratio test），而第 (iv) 部分只需一行。

解答

第 (i) 部分

當 $1 \le r \le 2n$ 時，把 r 與 $r!$ 約去，得

$$r\binom{2n}{r} = \frac{r\,(2n)!}{r!\,(2n-r)!} = \frac{(2n)!}{(r-1)!\,(2n-r)!}.$$

另一邊，$2n-(2n+1-r) = r-1$，所以

$$(2n+1-r)\binom{2n}{2n+1-r} = \frac{(2n+1-r)\,(2n)!}{(2n+1-r)!\,(r-1)!} = \frac{(2n)!}{(2n-r)!\,(r-1)!},$$

同樣是把分子的因子與階乘（factorial）約去。（我們需要 $1 \le r \le 2n$，使 $2n+1-r$ 介乎 1 與 $2n$ 之間，這樣兩個階乘才有意義。）兩個表達式相同，故恆等式成立。

至於和式，$r = 0$ 的項為零。把其餘各項分成 $1 \le r \le n$ 和 $n+1 \le r \le 2n$ 兩組。在較低的一組中，設 $s = 2n+1-r$。當 r 由 1 走到 n，s 便由 $2n$ 遞減至 $n+1$，而根據恆等式，

$$\sum_{r=1}^{n} r\binom{2n}{r} = \sum_{r=1}^{n}(2n+1-r)\binom{2n}{2n+1-r} = \sum_{s=n+1}^{2n} s\binom{2n}{s}.$$

因此較低一組等於較高一組，從而

$$\sum_{r=0}^{2n} r\binom{2n}{r} = 2\sum_{r=n+1}^{2n} r\binom{2n}{r},$$

得證。

第 (ii) 部分

設 H 為正面的次數，則 $H \sim \mathrm{B}(2n, \frac{1}{2})$，且 $\mathrm{P}(H = r) = \binom{2n}{r}/2^{2n}$。反面的次數為 $2n - H$，所以 $X = \max(H, 2n - H)$。即是說，當 $H \geq n+1$ 時 $X = H$；當 $H = n$ 時 $X = n$；當 $H \leq n-1$ 時 $X = 2n - H$。因此

$$2^{2n}\,\mathrm{E}(X) = \sum_{r=n+1}^{2n} r\binom{2n}{r} + n\binom{2n}{n} + \sum_{r=0}^{n-1}(2n-r)\binom{2n}{r}.$$

在最後一個和式中設 $s = 2n - r$，它由 $2n$ 遞減至 $n+1$。由於 $\binom{2n}{r} = \binom{2n}{2n-r}$，該和式變成 $\sum_{s=n+1}^{2n} s\binom{2n}{s}$，與第一個和式相同。（這就是正反面的對稱性：得到 s 次反面的機會與得到 s 次正面的機會相同。）

> **想一想** $\sum_{r=n+1}^{2n} r\binom{2n}{r}$ 只涵蓋一半的範圍，該如何求它的值？

這正是第 (i) 部分的用途。題目已給出全範圍的版本：以 $2n$ 代替 n，得 $\sum_{r=0}^{2n} r\binom{2n}{r} = 2n \cdot 2^{2n-1}$。所以由第 (i) 部分，

$$2\sum_{r=n+1}^{2n} r\binom{2n}{r} = 2n \cdot 2^{2n-1} = n\,2^{2n}.$$

因此

$$2^{2n}\,\mathrm{E}(X) = n\,2^{2n} + n\binom{2n}{n}, \qquad \text{所以} \qquad \mathrm{E}(X) = n\left(1 + \frac{1}{2^{2n}}\binom{2n}{n}\right),$$

得證。

第 (iii) 部分

設 $a_n = \binom{2n}{n}/2^{2n}$，它是正數。於是

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{(2n+2)!}{(n+1)!\,(n+1)!} \cdot \frac{n!\,n!}{(2n)!} \cdot \frac{1}{4} = \frac{(2n+2)(2n+1)}{4(n+1)^2} = \frac{2n+1}{2n+2},$$

這裏用了 $2n+2 = 2(n+1)$。這個比值小於 1，而 $a_n > 0$，所以對每個 $n \geq 1$ 都有 $a_{n+1} < a_n$。此數列（sequence）嚴格遞減（strictly decreasing）。

第 (iv) 部分

你贏得的金額正是第 (ii) 部分的 X，而你要付 £n，所以每付一英鎊的期望贏得金額為

$$\frac{\mathrm{E}(X)}{n} = 1 + \frac{1}{2^{2n}}\binom{2n}{n} = 1 + a_n.$$

由第 (iii) 部分，n 最小時 a_n 最大，所以你應選 $n = 1$。這時每付一英鎊可取回 $1 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$ 英鎊，即每英鎊的期望利潤為 50 便士（50p）。（若「贏得金額」指的是利潤，則為 $\mathrm{E}(X)/n - 1 = a_n$，結論不變。）

驗算

- 當 $n = 1$（擲兩次）時，HH 或 TT 對應 $X = 2$，HT 或 TH 對應 $X = 1$，所以 $\mathrm{E}(X) = \frac{1}{2}\cdot 2 + \frac{1}{2}\cdot 1 = \frac{3}{2}$。公式給出 $1\cdot(1 + \frac{2}{4}) = \frac{3}{2}$。
- 當 $n = 2$ 時，公式給出 $2(1 + \frac{6}{16}) = \frac{11}{4}$，所以每英鎊的回報為 $\frac{11}{8} = 1.375 < 1.5$。當 $n = 3$ 時，回報為 $\frac{21}{16} = 1.3125$，正如第 (iii) 部分所預測，仍在遞減。
- 對於 $n \le 5$，已用電腦逐一檢查全部 2^{2n} 個擲幣序列，確認 $\mathrm{E}(X)$ 的公式正確。

常見錯誤

- 把 $H = n$ 的項計算兩次，或完全漏掉。這一項不屬於分割的任何一邊，只貢獻一次 $n\binom{2n}{n}$。
- 在第 (iv) 部分中，去最大化會無限增大的 $\mathrm{E}(X)$ 本身，而不是每付一英鎊的 $\mathrm{E}(X)$。

STEP 之外

超出的部分 $\mathrm{E}(X) - n = na_n$ 是簡單隨機漫步（simple random walk）與起點之期望距離的一半。由史特靈公式（Stirling's formula），$a_n \approx 1/\sqrt{\pi n}$，所以這個超出量的增長與 $\sqrt{n/\pi}$ 相若：正面與反面次數的典型差距，按擲幣次數的平方根增長。與此同時，每英鎊的超出量 a_n 趨向 0，這正是大數定律（law of large numbers）在起作用。Grimmett 與 Welsh 合著的 *Probability: An Introduction*（《概率導論》）講述了隨機漫步及這些極限。

Beyond STEP 詳細解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hant/。解答文字採用 CC0 1.0；題目本身版權屬 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予轉載。由機器從英文翻譯而成；尚未經審閱。