詳細解答

# STEP III 2024，第 10 題

力學 • 傾倒與滑動

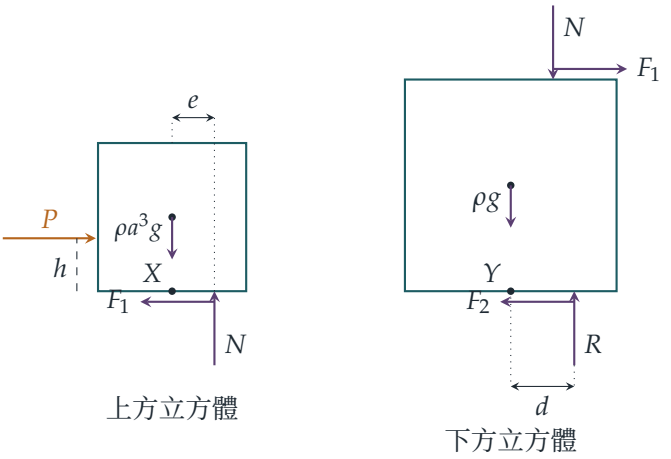
> **STEP III 2024，第 10 題**
>
> 繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 OCR 提供下載的 2024 年 STEP 試卷（zip 檔案）內的 STEP III 試卷：
>
> www.ocr.org.uk/Images/725753-2024-past-papers.zip

## 關鍵思路

每一部分都是在比較平衡（equilibrium）被打破的四種方式：上方立方體滑動、下方立方體滑動、上方立方體翻倒（topple），或兩個立方體一同翻倒。每一種情況各自在某個 $P$ 的臨界值發生；當 $P$ 由零開始增大時，哪個臨界值最小，哪種情況就先發生。選取適當的點取力矩（moments），即對整個系統取關於 $Y$ 的力矩、對上方立方體單獨取關於 $X$ 的力矩，便可以毫不費力地求得第 (i) 部分中法向反作用力（normal reaction）的位置；而當其中一個反作用力到達其作用面的邊緣時，翻倒便開始。

## 解答

我們把兩個立方體視為剛體（rigid body）。下方立方體的質量為 $\rho$，上方立方體的質量為 $\rho a^3$。設 $P$ 水平向右作用，作用點位於下方立方體頂面之上高度 $h$ 處，即離地面高度 $1+h$。由於 $P$ 是水平的，它關於任何一點的力矩只取決於其高度，而與它作用於該面上的哪個位置無關。




圖中 $N$ 和 $F_1$ 是兩個立方體之間的法向反作用力和摩擦力（friction）（根據牛頓第三定律（Newton's third law），在每個立方體上分別畫出），作用點與 $X$ 的距離為 $e$；$R$ 和 $F_2$ 是地面施加的法向反作用力和摩擦力，作用點與 $Y$ 的距離為 $d$。

**第 (i) 部分**

*整個系統*。外力只有 $P$、兩個重量、$R$ 和 $F_2$。分解各力，得

$$F_2 = P, \qquad R = \rho g + \rho a^3 g = (1 + a^3)\rho g.$$

對 $Y$ 取力矩。兩個重量都沿着通過 $Y$ 的鉛垂線作用（每個質心（centre of mass）都在 $Y$ 的正上方），而 $F_2$ 沿着地面通過 $Y$ 作用，所以這些力都沒有力矩。剩下的就是高度為 $1 + h$ 的 $P$，與距離為 $d$ 的 $R$ 互相平衡：

$$R\,d = P(1 + h) \quad \Longrightarrow \quad d = \frac{P(1 + h)}{(1 + a^3)\rho g},$$

此距離由 $Y$ 沿 $P$ 的方向量度。這正是所求的結果。

*單獨考慮上方立方體*。分解各力，得 $F_1 = P$ 及 $N = \rho a^3 g$。對 $X$ 取力矩，重量和 $F_1$ 都沒有力矩，所以 $Ne = Ph$，從而

$$e = \frac{Ph}{\rho a^3 g},$$

同樣由 $X$ 沿 $P$ 的方向量度。

### 第 (ii) 部分

在任何物體移動之前，摩擦力分別為兩個立方體之間的 $F_1 = P$ 及地面上的 $F_2 = P$。當某接觸處所需的摩擦力超過 $\mu$ 乘以該處的法向反作用力時，該處便會滑動（slip），所以

$$\begin{aligned} &\text{上方立方體在下方立方體上滑動的條件為} P > \mu\rho a^3 g, \\ &\text{下方立方體在地面上滑動的條件為} P > \mu(1+a^3)\rho g. \end{aligned}$$

由於 $a^3 < 1 + a^3$，第一個臨界值必定嚴格較小。當 $P$ 由零開始增大時（假如沒有先發生翻倒），上方立方體會先到達其極限並開始滑動，而此時地面的摩擦力仍遠未到達極限。上方立方體一旦開始滑動，它施加於下方立方體的摩擦力為 $\mu\rho a^3 g$，仍然小於地面所能提供的 $\mu(1+a^3)\rho g$，因此下方立方體保持不動。所以打破平衡的是上方立方體的滑動，而不是下方立方體的滑動。

### 第 (iii) 部分

當作用於一個平面上的物體所受的法向反作用力到達該面的邊緣時，物體便即將翻倒。上方立方體底面的半寬為 $\frac{1}{2}a$，下方立方體底面的半寬為 $\frac{1}{2}$。因此，以 $\rho g$ 為單位量度所有力，$P$ 的四個臨界值為

$$\begin{aligned} P_{\text{滑動}} &= \mu a^3 \text{（上方在下方上）}, & P_{\text{地面}} &= \mu(1+a^3), \\ P_{\text{上翻}} &= \frac{a^4}{2h} \text{（由} e = \tfrac{1}{2}a \text{ 得）}, & P_{\text{同翻}} &= \frac{1+a^3}{2(1+h)} \text{（由} d = \tfrac{1}{2} \text{ 得）}. \end{aligned}$$

下方立方體翻倒時會把上方立方體一併帶倒，這就是為甚麼 $d = \frac{1}{2}$ 表示兩個立方體一同翻倒。

現在設 $a = 1$，於是 $P_{\text{滑動}} = \mu$、$P_{\text{上翻}} = \frac{1}{2h}$ 及 $P_{\text{同翻}} = \frac{1}{1+h}$。根據第 (ii) 部分，我們可以不理會 $P_{\text{地面}}$。

> **想一想** 我們需要擔心上方立方體單獨翻倒嗎？

不需要，但必須加以驗證。由於 $h < a = 1$，我們有 $2h < 1 + h$，所以

$$P_{\text{上翻}} = \frac{1}{2h} > \frac{1}{1+h} = P_{\text{同翻}}.$$

兩個立方體會在上方立方體能夠單獨翻倒之前一同翻倒。因此只需比較 $P_{\text{滑動}} = \mu$ 與 $P_{\text{同翻}} = 1/(1+h)$：

- 若 $\mu(1+h) < 1$，則 $\mu < \frac{1}{1+h}$，滑動的臨界值先到達，上方立方體在下方立方體上滑動；
- 若 $\mu(1+h) > 1$，則 $\frac{1}{1+h} < \mu$，翻倒的臨界值先到達，兩個立方體一同翻倒。

### 第 (iv) 部分

若沒有發生滑動，便只需比較 $P_{\text{上翻}}$ 與 $P_{\text{同翻}}$。上方立方體先翻倒，當且僅當

$$\frac{a^4}{2h} < \frac{1+a^3}{2(1+h)} \iff a^4(1+h) < h(1+a^3) \iff a^4 < h\big(1+a^3-a^4\big) = h\big(1+a^3(1-a)\big),$$

其中我們在兩邊乘以正數 $2h(1+h)$。這正是題目所給的條件，所以在此條件下，打破平衡的是上方立方體的翻倒。

### 第 (v) 部分

當 $a = \frac{1}{2}$ 時，我們需要滿足三個條件。

- 第 (iv) 部分的條件：$h\big(1+\frac{1}{8}\cdot\frac{1}{2}\big) > \frac{1}{16}$，即 $\frac{17}{16}h > \frac{1}{16}$，所以 $h > \frac{1}{17}$。
- 題目設定要求 $h < a = \frac{1}{2}$。
- 翻倒之前沒有滑動：$P_{\text{上翻}} < P_{\text{滑動}}$，即 $\dfrac{1/16}{2h} < \dfrac{\mu}{8}$，亦即 $\mu > \dfrac{1}{4h}$。（根據第 (ii) 部分，在地面上的滑動永遠不會最先發生。）由於我們同時需要 $\mu < 1$，這要求 $h > \frac{1}{4}$。

所以選取 $h = \frac{2}{5}$，它滿足 $\frac{1}{4} < h < \frac{1}{2}$ 及 $h > \frac{1}{17}$。這時我們需要 $\frac{5}{8} < \mu < 1$；取 $\mu = \frac{3}{4}$。於是各臨界值（以 $\rho g$ 為單位）為

$$P_{\text{上翻}} = \tfrac{5}{64} \approx 0.078, \quad P_{\text{滑動}} = \tfrac{3}{32} \approx 0.094, \quad P_{\text{同翻}} = \tfrac{45}{112} \approx 0.402, \quad P_{\text{地面}} = \tfrac{27}{32} \approx 0.844.$$

最小的是 $P_{\text{上翻}}$，所以當 $P$ 增大時，上方立方體會在任何滑動發生之前翻倒：第 (iv) 部分的情況確實會出現。

## 驗算

- 當 $P \to 0$ 時，$d$ 和 $e$ 都趨向 0：沒有推力時，每個反作用力都作用於質心的正下方，理應如此。
- 單獨對下方立方體取力矩（其重量、距離為 $d$ 的 $R$ 和 $F_2$，以及方向相反、與 $X$ 距離為 $e$ 的 $N$ 和 $F_1$），得 $Rd = Ne + F_1\cdot 1$，即 $P(1+h) = Ph + P$。所以第 (i) 部分的兩個答案互相吻合。
- 對於 $a = \frac{1}{2}$、$h = \frac{2}{5}$、$\mu = \frac{3}{4}$，上述四個臨界值都經過精確計算；而第 (ii)–(iv) 部分中的比較亦已用電腦就大量隨機選取的 $a$、$h$ 和 $\mu$ 加以驗證。

## 常見錯誤

- 在第 (iii) 部分中，只比較滑動與兩個立方體一同翻倒，卻從未證明上方立方體不會先翻倒。
- 對上方立方體取關於地面上某點的力矩，這樣會把接觸面上的摩擦力 $F_1$ 牽涉進來；對 $X$ 取力矩則可避免。
- 在整個系統的力矩方程中，誤把 $h$ 而不是 $1+h$ 當作 $P$ 離地面的高度。

## STEP 之外

這裏每一種失效方式都是關於各力的一條不等式，只要所有不等式同時成立，平衡便得以維持；最先失效的，就是臨界值最小的那一條。這種「一組線性約束中有一條起決定作用（binding）」的想法，正是工程學中用於砌體及堆疊結構的極限分析（limit analysis）的核心，更廣泛而言亦是線性規劃（linear programming）的核心。若想深入了解摩擦力、扭矩（torque）及剛體靜力學，可參閱 Kleppner 和 Kolenkow 所著的 *An Introduction to Mechanics*（《力學導論》）。

Beyond STEP 詳細解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hant/。解答文字採用 CC0 1.0；題目本身版權屬 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予轉載。由機器從英文翻譯而成；尚未經審閱。