詳細解答

STEP III 2024，第 1 題

純數學 • 裂項相消級數

STEP III 2024，第 1 題

繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 OCR 提供下載的 2024 年 STEP 試卷（zip 檔案）內的 STEP III 試卷：

www.ocr.org.uk/Images/725753-2024-past-papers.zip

關鍵思路

這裡每一個和都用同一方法處理：先把每項拆成部分分式（partial fractions），找出其中屬於 $1/r^2$ 倍數的部分（它們加起來是 S_N 的倍數），再把其餘部分整理成 $f(r)-f(r+1)$ 形式的差，這些差會裂項相消（telescope）。全程只處理到 N 為止的有限和，到最後每一部分都有已知極限時，才讓 $N\to\infty$。

解答

第 (i) 部分

以 $r^2(r+1)$ 為公分母，

$$\frac{1}{r+1}-\frac{1}{r}+\frac{1}{r^2}=\frac{r^2-r(r+1)+(r+1)}{r^2(r+1)}=\frac{r^2-r^2-r+r+1}{r^2(r+1)}=\frac{1}{r^2(r+1)},$$

得證。

現在由 $r=1$ 加到 N。各 $1/r^2$ 項之和為 S_N，其餘兩項則裂項相消：

$$\sum_{r=1}^{N}\left(\frac{1}{r+1}-\frac{1}{r}\right)=\left(\tfrac{1}{2}-1\right)+\left(\tfrac{1}{3}-\tfrac{1}{2}\right)+\cdots+\left(\tfrac{1}{N+1}-\tfrac{1}{N}\right)=\frac{1}{N+1}-1.$$

因此

$$\sum_{r=1}^{N}\frac{1}{r^2(r+1)}=S_N-1+\frac{1}{N+1}.$$

當 $N\to\infty$ 時，$S_N\to\tfrac{1}{6}\pi^2$ 而 $\tfrac{1}{N+1}\to 0$，所以右方趨於 $\tfrac{1}{6}\pi^2-1$。按定義，無窮和就是

部分和（partial sums）的極限，所以

$$\sum_{r=1}^{\infty} \frac{1}{r^2(r+1)} = \tfrac{1}{6}\pi^2 - 1.$$

第 (ii) 部分

設

$$\frac{1}{r^2(r+1)(r+2)} = \frac{A}{r} + \frac{B}{r^2} + \frac{C}{r+1} + \frac{D}{r+2}.$$

兩邊乘以 $r^2(r+1)(r+2)$，並使用遮蓋法（cover-up rule）：代入 $r=0$ 得 $B = \frac{1}{2}$；$r=-1$ 得 $C = \frac{1}{(-1)^2 \cdot 1} = 1$；$r=-2$ 得 $D = \frac{1}{4\cdot(-1)} = -\frac{1}{4}$。當 r 很大時，左方的數量級為 $1/r^4$，所以右方各 $1/r$ 項必須互相抵消：$A + C + D = 0$，得 $A = -\frac{3}{4}$。所以

$$\frac{1}{r^2(r+1)(r+2)} = \frac{1}{2r^2} - \frac{3}{4r} + \frac{1}{r+1} - \frac{1}{4(r+2)}.$$

想一想 $-\frac{3}{4r}$、$\frac{1}{r+1}$、$-\frac{1}{4(r+2)}$ 這三項看來不像單一個可裂項相消的差。怎樣才能令它們裂項相消？

把中間的係數拆成 $1 = \frac{3}{4} + \frac{1}{4}$，使每一部分都可與相鄰的項配對：

$$-\frac{3}{4r} + \frac{1}{r+1} - \frac{1}{4(r+2)} = -\frac{3}{4}\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{r+1}\right) + \frac{1}{4}\left(\frac{1}{r+1} - \frac{1}{r+2}\right).$$

現在每個括號都會裂項相消：

$$\sum_{r=1}^{N}\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{r+1}\right) = 1 - \frac{1}{N+1}, \qquad \sum_{r=1}^{N}\left(\frac{1}{r+1} - \frac{1}{r+2}\right) = \frac{1}{2} - \frac{1}{N+2}.$$

因此

$$\begin{aligned}\sum_{r=1}^{N} \frac{1}{r^2(r+1)(r+2)} &= \tfrac{1}{2}S_N - \tfrac{3}{4}\left(1 - \frac{1}{N+1}\right) + \tfrac{1}{4}\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{N+2}\right) \\ &= \tfrac{1}{2}S_N - \frac{5}{8} + \frac{3}{4(N+1)} - \frac{1}{4(N+2)}.\end{aligned}$$

令 $N \to \infty$，最後兩項趨於 0，而 $S_N \to \frac{1}{6}\pi^2$，所以

$$\sum_{r=1}^{\infty} \frac{1}{r^2(r+1)(r+2)} = \frac{\pi^2}{12} - \frac{5}{8}.$$

第 (iii) 部分

目標式的右方有 $\frac{2}{r^2(r+1)}$，所以比較這兩項。利用第 (i) 部分，

$$\frac{2}{r^2(r+1)} = \frac{2}{r+1} - \frac{2}{r} + \frac{2}{r^2}.$$

另一方面，

$$\frac{1}{r^2(r+1)^2} = \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{r+1}\right)^2 = \frac{1}{r^2} + \frac{1}{(r+1)^2} - \frac{2}{r(r+1)} = \frac{1}{r^2} + \frac{1}{(r+1)^2} - \frac{2}{r} + \frac{2}{r+1},$$

其中兩步都用了 $\frac{1}{r} - \frac{1}{r+1} = \frac{1}{r(r+1)}$。相減得

$$\frac{1}{r^2(r+1)^2} - \frac{2}{r^2(r+1)} = \frac{1}{(r+1)^2} - \frac{1}{r^2},$$

即

$$\frac{1}{r^2(r+1)^2} = \frac{2}{r^2(r+1)} - \left(\frac{1}{r^2} - \frac{1}{(r+1)^2}\right).$$

想一想 為甚麼不直接把無窮級數逐項相加？

只有在知道每一部分都收斂（converge）之後，重新排列無窮和才是安全的，所以我們先加到 N。括號部分裂項相消：

$$\sum_{r=1}^{N} \frac{1}{r^2(r+1)^2} = \sum_{r=1}^{N} \frac{2}{r^2(r+1)} - \left(1 - \frac{1}{(N+1)^2}\right).$$

由第 (i) 部分，當 $N \to \infty$ 時右方第一個和收斂（至 $2(\frac{1}{6}\pi^2 - 1)$），而 $\frac{1}{(N+1)^2} \to 0$。所以左方亦收斂，並且

$$\sum_{r=1}^{\infty} \frac{1}{r^2(r+1)^2} = \sum_{r=1}^{\infty} \frac{2}{r^2(r+1)} - 1,$$

得證。兩邊都等於 $\frac{1}{3}\pi^2 - 3$。

驗算

- 在第 (ii) 部分取 $N = 1$：和只有一項 $\frac{1}{6}$，而公式給出 $\frac{1}{2} - \frac{5}{8} + \frac{3}{8} - \frac{1}{12} = \frac{12-15+9-2}{24} = \frac{1}{6}$。
- 數值上，$\frac{1}{6}\pi^2 - 1 \approx 0.644934$，$\frac{1}{12}\pi^2 - \frac{5}{8} \approx 0.197467$，$\frac{1}{3}\pi^2 - 3 \approx 0.289868$。用電腦把每個級數的首一百萬項相加，三個數值都至少準確到小數點後九位。
- 三個部分中的有限恆等式，已用有理數運算對 N 直至 59 的每一個值逐一精確核實。

常見錯誤

- 弄錯裂項相消和的首尾項，尤其是 $\frac{1}{r+1} - \frac{1}{r+2}$ 的和，它由 $\frac{1}{2}$ 開始，而不是 1。
- 拆成像 $\sum \frac{1}{r}$ 這樣各自發散（diverge）的無窮級數，而不是把調和型（harmonic-type）的部分放在有限和中一併處理。

STEP 之外

$\sum 1/r^2 = \pi^2/6$ 這個值是歐拉（Euler）對巴塞爾問題（Basel problem）的解答，在大學裡通常用傅里葉級數（Fourier series）或 $\sin x$ 的乘積公式來證明。這裡對有限和的小心處理，正是分析學（analysis）課程要嚴格化的內容：級數就是其部分和的極限，收斂級數的和可以合併，發散級數則不可以。Abbott 的 *Understanding Analysis*（《理解分析》）正是這樣處理級數的，很適合作為下一本讀物。

Beyond STEP 詳細解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hant/。解答文字採用 CC0 1.0；題目本身版權屬 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予轉載。由機器從英文翻譯而成；尚未經審閱。