詳細解答

STEP II 2024，第 9 題

力學 • 拋體運動

STEP II 2024，第 9 題

繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 OCR 提供下載的 2024 年 STEP 試卷（zip 檔案）內的 STEP II 試卷：

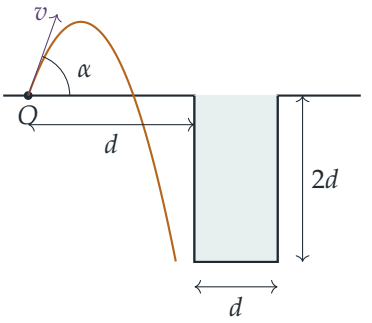
www.ocr.org.uk/Images/725753-2024-past-papers.zip

關鍵思路

一切都由軌跡方程（trajectory equation）$y = x\tan\alpha - \frac{gx^2}{2v^2}\sec^2\alpha$ 推出，把它寫成以 $t = \tan\alpha$ 為變量的二次式（quadratic）。要乾淨利落地落在溝底，意味着兩件事：質點到達近邊時仍在地面之上；而在它本應到達對面一側之前，已經低於溝底的水平。每個條件都是關於 t 的二次不等式（quadratic inequality），而配方（completing the square）可把它們化成所需的形式。第 (ii) 部分則只需證明 t 的兩個容許範圍有重疊。

解答

把質點視為只受重力作用的點狀拋射體（projectile），不計空氣阻力（air resistance）。取拋射點為原點，x 沿水平方向指向溝渠，y 豎直向上。於是近壁是直線 $x = d$，遠壁是 $x = 2d$，而溝底是 $y = -2d$，其中 $d < x < 2d$。



在時刻 T，水平速度為 $v\cos\alpha$，豎直速度為 $v\sin\alpha - gT$，消去 T 得

$$y = x\tan\alpha - \frac{gx^2}{2v^2\cos^2\alpha} = xt - \frac{x^2(1+t^2)}{2\lambda d},$$

其中 $t = \tan\alpha$，並用了 $v^2 = \lambda dg$ 及 $\sec^2\alpha = 1 + t^2$。

第 (i)(a) 部分

要避免在溝渠前撞到地面或撞到近壁，質點在 $x = d$ 時必須仍嚴格高於地面。（若它在該處位於 $y = 0$ 或以下，它便已撞到地面，或將撞上近壁。）所以

$$y(d) = dt - \frac{d(1+t^2)}{2\lambda} > 0 \iff 2\lambda t - 1 - t^2 > 0 \iff t^2 - 2\lambda t + \lambda^2 < \lambda^2 - 1,$$

這裏乘以了 $2\lambda/d > 0$。即

$$(\tan\alpha - \lambda)^2 < \lambda^2 - 1,$$

此即所求。左邊是平方，所以 $\lambda^2 - 1 > 0$；由於 $\lambda = v^2/(dg) > 0$，得 $\lambda > 1$。

第 (i)(b) 部分

現在考慮遠壁。路徑是一條開口向下的拋物線（parabola），在 $x = d$ 時高於溝底水平 $-2d$。它在 $x = 2d$ 之前到達 $y = -2d$（即溝底），當且僅當它在 $x = 2d$ 時已低於該水平，即 $y(2d) < -2d$。反之若 $y(2d) \geq -2d$，它到達 $x = 2d$ 時仍未觸及溝底，因此會碰到遠壁（或者整條溝渠都飛越過去）。

> ? **想一想** 為甚麼只看 $x = 2d$ 這一點就足夠？

因為 $y(x) + 2d$ 是關於 x 的二次式，首項係數（leading coefficient）為負，且在 $x = d$ 時為正。它在 $x = d$ 之後恰有一個根（root），而這個根位於 $2d$ 之前，當且僅當該二次式在 $x = 2d$ 時已經為負。

所以我們需要

$$y(2d) = 2dt - \frac{4d^2(1+t^2)}{2\lambda d} < -2d \iff \lambda t - (1+t^2) < -\lambda \iff t^2 - \lambda t + 1 - \lambda > 0,$$

這裏乘以了 $\lambda/(2d) > 0$。乘以 4 再配方，

$$4t^2 - 4\lambda t + \lambda^2 > \lambda^2 - 4 + 4\lambda, \qquad \text{即} \qquad (2\tan\alpha - \lambda)^2 > \lambda^2 + 4(\lambda - 1),$$

此即所求。

推出 $\alpha > 45°$。由 (a)，$\lambda > 1$，所以 $\lambda^2 + 4(\lambda - 1) > \lambda^2 > 0$。記 $s = \sqrt{\lambda^2 + 4\lambda - 4}$，則 $s > \lambda$。(b) 中的不等式表示

$$2t > \lambda + s \qquad \text{或} \qquad 2t < \lambda - s.$$

由於 $s > \lambda$，第二種情況給出 $t < 0$。但 (a) 迫使 $t > 0$：由 $(t-\lambda)^2 < \lambda^2 - 1 < \lambda^2$ 得 $|t-\lambda| < \lambda$，所以 $t > 0$。（從物理上看，質點必須上升才能越過近邊。）因此第一種情況成立，並且

$$2t > \lambda + s > \lambda + \lambda = 2\lambda > 2,$$

所以 $\tan\alpha > \lambda > 1$。由於 $0 < \alpha < 90°$，得 $\alpha > 45°$。

第 (ii) 部分

反過來，兩個條件合起來已經足夠。若 $y(d) > 0$，由於 $y(0) = 0$ 且 y 是凹函數（concave），在整個區間 $0 < x \leq d$ 上都有 $y > 0$，所以質點越過地面和近壁。若同時 $y(2d) < -2d$，它會在嚴格介乎 d 與 $2d$ 之間的某個 x 到達溝底，而在此之前一直留在溝渠之內。所以我們只需證明：對每個 $\lambda > 1$，存在某個 $t > 0$ 同時滿足兩個不等式。

由 (a)，容許值為 $\lambda - \sqrt{\lambda^2-1} < t < \lambda + \sqrt{\lambda^2-1}$。由 (b) 連同 $t > 0$，容許值為 $t > \frac{1}{2}(\lambda + s)$。兩者對某個 t 同時成立，只要

$$\tfrac{1}{2}(\lambda + s) < \lambda + \sqrt{\lambda^2-1} \iff s < \lambda + 2\sqrt{\lambda^2-1}.$$

（(a) 的下界不會造成麻煩，因為 $\frac{1}{2}(\lambda+s) > \lambda > \lambda - \sqrt{\lambda^2-1}$。）兩邊皆為正，所以可以平方：

$$\begin{aligned} & \lambda^2 + 4\lambda - 4 < \lambda^2 + 4\lambda\sqrt{\lambda^2-1} + 4(\lambda^2-1) \\ \iff \quad & 4\lambda < 4\lambda\sqrt{\lambda^2-1} + 4\lambda^2 \\ \iff \quad & 1 < \sqrt{\lambda^2-1} + \lambda, \end{aligned}$$

這裏除以了 $4\lambda > 0$。由於 $\lambda > 1$，最後一行成立。所以區間

$$\tfrac{1}{2}\left(\lambda + \sqrt{\lambda^2 + 4\lambda - 4}\right) < \tan\alpha < \lambda + \sqrt{\lambda^2-1}$$

是非空的（non-empty）。選取 α 使 $\tan\alpha$ 落在其中（這是可行的，因為 tan 在 $(0°, 90°)$ 上取遍所有正值），質點便會落在溝底而不碰到任何一側。

驗算

- 取 $\lambda = 2$。區間為 $1 + \sqrt{2} < \tan\alpha < 2 + \sqrt{3}$，恰好是 $67.5° < \alpha < 75°$。把 $\alpha = 70°$ 代入 $y = xt - x^2(1+t^2)/(4d)$，得 $y(d) \approx 0.61d > 0$ 及 $y(2d) \approx -3.05d < -2d$，與預期相符。
- 當 $\lambda \to 1^+$ 時，區間兩端都趨於 1，所以可行範圍收縮至 $\alpha = 45°$：當 $v^2 = dg$ 時，質點只能勉強到達近邊，這需要最大射程（maximum range）的角度。
- 用電腦隨機檢驗數以千計的 (λ, α) 組合，按時間逐步推進運動，結果在每一種情況下都與兩個不等式吻合。

常見錯誤

- 把條件當成 $y(d) > -2d$（高於溝底）而非 $y(d) > 0$：近壁一直延伸到地面高度。
- 在 (b) 中忘記排除 $2\tan\alpha < \lambda - s$ 這一支，而這需要用到 $\tan\alpha > 0$。
- 在 (ii) 中未先指出兩邊皆為正便把不等式平方。

STEP 之外

這裏一個物理條件（「落在溝渠內」）變成了發射參數空間中由不等式所圍出的一個區域，而問題在於該區域是否非空。這正是最佳化（optimisation）與控制（control）的起點：描述可行（feasible）輸入的集合，並找出其邊界。Kleppner 與 Kolenkow 的 *An Introduction to Mechanics*（《力學導論》）以大學一年級程度討論拋射運動及其延伸（空氣阻力、旋轉參考系）。

Beyond STEP 詳細解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hant/。解答文字採用 CC0 1.0；題目本身版權屬 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予轉載。由機器從英文翻譯而成；尚未經審閱。