詳細解答

STEP II 2024，第 8 題

純數學 • 算術幾何平均

STEP II 2024，第 8 題

繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 OCR 提供下載的 2024 年 STEP 試卷（zip 檔案）內的 STEP II 試卷：

www.ocr.org.uk/Images/725753-2024-past-papers.zip

本題在 *Beyond STEP* 第 2.6 節算術幾何平均中有完整的引導式講解：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hant/ch02/agm.html

關鍵思路

兩個數列互相夾近：算術平均數逐步下降，幾何平均數逐步上升，而兩者之差每次至少減半，所以兩個數列都趨於同一個極限 M，即 x_0 與 y_0 的算術—幾何平均數（arithmetic–geometric mean）。在第 (ii) 部分，代換（substitution）把數對 (p, q) 的積分變成這兩個數的平均數所成數對的積分，所以在整個迭代過程中積分的值始終不變。令 $n \to \infty$，積分便化為一個我們能夠計算的積分。

解答

第 (i) 部分

首先用歸納法（induction）證明對每個 n 都有 $0 < y_n < x_n$。當 $n = 0$ 時成立。假設 $0 < y_n < x_n$，則 $\sqrt{x_n} \neq \sqrt{y_n}$，所以

$$0 < \left(\sqrt{x_n} - \sqrt{y_n}\right)^2 = x_n + y_n - 2\sqrt{x_n y_n},$$

整理得 $\frac{1}{2}(x_n + y_n) > \sqrt{x_n y_n}$，即 $y_{n+1} < x_{n+1}$。此外 $y_{n+1} = \sqrt{x_n y_n} > 0$。歸納法至此完成，所以對所有 $n \geq 0$ 都有 $y_{n+1} < x_{n+1}$。

利用 $y_n < x_n$：

$$x_{n+1} = \tfrac{1}{2}(x_n + y_n) < \tfrac{1}{2}(x_n + x_n) = x_n,$$
$$y_{n+1} = \sqrt{x_n y_n} > \sqrt{y_n y_n} = y_n,$$

其中第二行用到 $x_n > y_n > 0$ 以及平方根是遞增函數這一事實。

所以 (y_n) 是遞增數列，而且有上界（bounded above）：$y_n < x_n < x_{n-1} < \cdots < x_0$，所以對所有 n 都有 $y_n < x_0$。根據該定理，存在某個 $M \le x_0$ 使得 $y_n \to M$。（由於數列從 y_0 開始遞增，亦有 $M \ge y_0 > 0$。）

至於兩者之差，左邊的不等式 $x_{n+1} - y_{n+1} > 0$ 正是我們最先證明的結果。至於右邊的不等式，由於 $y_{n+1} > y_n$，

$$x_{n+1} - y_{n+1} < x_{n+1} - y_n = \tfrac{1}{2}(x_n + y_n) - y_n = \tfrac{1}{2}(x_n - y_n).$$

反覆應用此式，得

$$0 < x_n - y_n < \frac{x_0 - y_0}{2^n} \to 0,$$

所以由夾逼原理（squeezing）得 $x_n - y_n \to 0$。最後，$x_n = y_n + (x_n - y_n)$ 是一個趨於 M 的數列與一個趨於 0 的數列之和，所以 $x_n \to M$ 亦成立。

第 (ii) 部分

記 $a = \frac{1}{2}(p+q)$、$g = \sqrt{pq}$，並把關於 t 的積分記作 J。

代換。 對 $x > 0$，令 $t = \frac{1}{2}\left(x - \frac{pq}{x}\right)$，則

$$\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}x} = \frac{1}{2}\left(1 + \frac{pq}{x^2}\right) = \frac{x^2 + pq}{2x^2} > 0,$$

所以 t 嚴格遞增，當 $x \to 0^+$ 時趨於 $-\infty$，當 $x \to \infty$ 時趨於 $+\infty$：此代換把 $(0,\infty)$ 一一對應（one-to-one）地映射到整條實數線上。現在改寫根號內的兩個因子。

$$pq + t^2 = \tfrac{1}{4}\left(x^2 + 2pq + \frac{p^2q^2}{x^2}\right) = \frac{1}{4}\left(x + \frac{pq}{x}\right)^2 = \left(\frac{x^2 + pq}{2x}\right)^2,$$
$$\begin{aligned}\tfrac{1}{4}(p+q)^2 + t^2 &= \tfrac{1}{4}\left(p^2 + 2pq + q^2 + x^2 - 2pq + \frac{p^2q^2}{x^2}\right)\\ &= \frac{x^4 + (p^2+q^2)x^2 + p^2q^2}{4x^2} = \frac{(x^2+p^2)(x^2+q^2)}{4x^2}.\end{aligned}$$

由於 $x > 0$ 且 $x^2 + pq > 0$，兩者乘積的平方根為

$$\frac{x^2 + pq}{2x} \cdot \frac{\sqrt{(p^2+x^2)(q^2+x^2)}}{2x}.$$

因此

$$J = \int_0^\infty \frac{x^2+pq}{2x^2}\cdot\frac{4x^2}{(x^2+pq)\sqrt{(p^2+x^2)(q^2+x^2)}}\,\mathrm{d}x$$
$$= 2\int_0^\infty \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{(p^2+x^2)(q^2+x^2)}} = 2\,\mathrm{I}(p,q).$$

直接解讀同一個積分。 由於 $\frac{1}{4}(p+q)^2 = a^2$ 及 $pq = g^2$，J 的被積函數（integrand）是 $1/\sqrt{(a^2+t^2)(g^2+t^2)}$，它是 t 的偶函數（even function）。所以

$$J = 2\int_0^\infty \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{(a^2+t^2)(g^2+t^2)}} = 2\,\mathrm{I}(a,g),$$

這樣做是合理的，因為 a、g 均為正數且 $g < a$（由於 $p \neq q$，這由第 (i) 部分的不等式得出）。比較 J 的兩個表達式，得

$$\mathrm{I}(p,q) = \mathrm{I}\big(\mathrm{a}(p,q),\mathrm{g}(p,q)\big),$$

此即所求。

計算 $\mathrm{I}(x_0,y_0)$。 取 $(p,q) = (x_n,y_n)$ 應用上式（由於 $0 < y_n < x_n$，這是容許的），得 $\mathrm{I}(x_n,y_n) = \mathrm{I}(x_{n+1},y_{n+1})$，所以

$$\mathrm{I}(x_0,y_0) = \mathrm{I}(x_n,y_n) \quad \text{對每個} n.$$

> **想一想** 我們想令 $n \to \infty$，並說積分趨於 $\mathrm{I}(M,M)$。在無窮區間上的積分，怎樣才能合理地把極限移到積分號之內？

我們用夾逼的方法，避開任何微妙的極限論證。對 $0 < y_n < x_n$ 及每個 x，

$$(y_n^2+x^2)^2 \le (x_n^2+x^2)(y_n^2+x^2) \le (x_n^2+x^2)^2,$$

所以取平方根再取倒數（這會令不等號反向），然後積分，得

$$\int_0^\infty \frac{\mathrm{d}x}{x_n^2+x^2} \le \mathrm{I}(x_n,y_n) \le \int_0^\infty \frac{\mathrm{d}x}{y_n^2+x^2}.$$

對 $c > 0$，$\displaystyle\int_0^\infty \frac{\mathrm{d}x}{c^2+x^2} = \Big[\frac{1}{c}\arctan\frac{x}{c}\Big]_0^\infty = \frac{\pi}{2c}$，所以

$$\frac{\pi}{2x_n} \le \mathrm{I}(x_0,y_0) \le \frac{\pi}{2y_n} \quad \text{對每個} n.$$

中間一項不隨 n 改變，而由於 $x_n \to M$、$y_n \to M$ 且 $M > 0$，上下兩界都趨於 $\pi/(2M)$。因此

$$\mathrm{I}(x_0,y_0) = \frac{\pi}{2M}.$$

驗算

- 取 $x_0 = 2$、$y_0 = 1$。迭代得 $(1.5,\ 1.41421)$，然後是 $(1.45711,\ 1.45648)$，再下一步兩者在五位有效數字內一致，即 $M \approx 1.45679$。所以 $\pi/(2M) \approx 1.07826$，而用數值方法計算 $\mathrm{I}(2,1)$ 亦得 1.07826。
- 若 $p = q$，則恆等式顯然成立，因為此時 $\mathrm{a}(p,p) = \mathrm{g}(p,p) = p$。答案 $\pi/(2M)$ 與此吻合，因為 $\mathrm{I}(M,M) = \pi/(2M)$。
- 收斂速度極快：最初幾步之後，兩者之差大約每次平方一次，遠比我們證明的減半要好。

常見錯誤

- 在歸納法中使用 $y_{n+1} < x_{n+1}$，卻沒有先確立 $y_n < x_n$（以及 $y_n > 0$，使平方根有意義）。
- 忘記關於 t 的積分是在整條實數線上進行，因此等於 $\mathrm{I}(a,g)$ 的兩倍；兩個因子 2 必須互相抵消。
- 毫無理據地寫出 $\mathrm{I}(x_n,y_n) \to \mathrm{I}(M,M)$。上面的夾逼論證提供了一個可靠的理由。

STEP 之外

共同極限 M 就是高斯（Gauss）的算術—幾何平均數，而積分 I 是一個*完全橢圓積分*（complete elliptic integral）：高斯在 1799 年發現了這個恆等式，它提供了一種快得驚人的方法來計算橢圓積分，甚至可以計算 π 本身（高斯—勒讓德算法（Gauss–Legendre algorithm））。開頭引用的單調收斂定理（monotone convergence theorem），以及交換極限與積分次序時所需的謹慎，都是大學第一門分析（analysis）課程的核心主題；Abbott 的 *Understanding Analysis*（《理解分析》）是正式認識這些內容的絕佳起點。

Beyond STEP 詳細解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hant/。解答文字採用 CC0 1.0；題目本身版權屬 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予轉載。由機器從英文翻譯而成；尚未經審閱。