詳細解答

STEP II 2024，第 7 題

純數學 • 曲線描繪

STEP II 2024，第 7 題

繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 OCR 提供下載的 2024 年 STEP 試卷（zip 檔案）內的 STEP II 試卷：

www.ocr.org.uk/Images/725753-2024-past-papers.zip

關鍵思路

每個括號都是一個圓的方程，所以 C_1 不過是兩個圓。至於 C_2，把括號展開後，所有項都會歸結為 x^2+y^2 和 x^2，因此用一條水平直線去截它，就會得到一個關於 x^2 的二次方程（quadratic）。於是計算交點數目就變成計算這個二次方程有多少個正根，而這只需結合判別式（discriminant）、兩根之和與兩根之積便可確定。

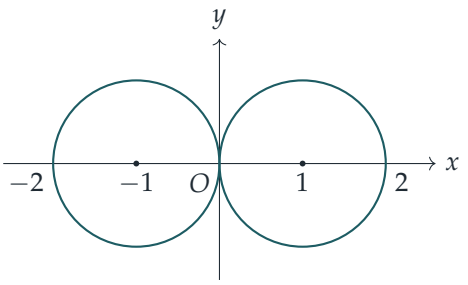
解答

全題中記

$$A = y^2+(x-1)^2-1 = x^2+y^2-2x, \qquad B = y^2+(x+1)^2-1 = x^2+y^2+2x.$$

第 (i) 部分

一個乘積等於零，當且僅當其中一個因子等於零，所以 C_1 是圓 $A=0$ 與圓 $B=0$ 的並集（union）。這兩個圓的半徑都是 1，圓心分別在 $(1,0)$ 和 $(-1,0)$。兩圓都經過原點，並在原點相切（它們在該處的公切線（tangent）是 y 軸）。曲線的最高點是 $(\pm 1,1)$，與 x 軸相交於 $x=-2,0,2$。



第 (ii)(a) 部分

由於 A 和 B 分別具有 $s-2x$ 和 $s+2x$ 的形式，其中 $s=x^2+y^2$，故

$$AB=(x^2+y^2)^2-4x^2.$$

在直線 $y=k$ 上，方程 $AB=\frac{1}{16}$ 變為

$$\begin{aligned}(x^2+k^2)^2-4x^2&=\tfrac{1}{16}\\ x^4+2k^2x^2+k^4-4x^2-\tfrac{1}{16}&=0\\ x^4+2(k^2-2)x^2+\left(k^4-\tfrac{1}{16}\right)&=0,\end{aligned}$$

此即所求。

現在設 $u=x^2$，得

$$u^2+2(k^2-2)u+\left(k^4-\tfrac{1}{16}\right)=0. \qquad (*)$$

每個根 $u>0$ 給出兩個交點 $x=\pm\sqrt{u}$；根 $u=0$ 給出一個交點（$x=0$）；根 $u<0$ 則不給出任何交點。所以我們需要知道 $(*)$ 各根的正負號。以下三個量可以告訴我們：

- 四分之一判別式（quarter-discriminant）$(k^2-2)^2-\left(k^4-\frac{1}{16}\right)=\frac{65}{16}-4k^2$，當 k 小於、等於或大於 $\frac{\sqrt{65}}{8}$ 時，它分別為正、零或負；
- 兩根之和 $2(2-k^2)$；
- 兩根之積 $k^4-\frac{1}{16}$，當 $k>0$ 時，它與 $k-\frac{1}{2}$ 同號。

注意 $\frac{1}{2}<\frac{\sqrt{65}}{8}\approx 1.008$，而且只要兩根是實數，就有 $k^2\le\frac{65}{64}<2$，所以兩根之和為正。

想一想 如果兩根之積為負，我們還需要檢查判別式嗎？

不需要：兩根之積為負，必然迫使兩根為實數（此時判別式 b^2-4ac 為正）且一正一負。現在逐一考慮各種情況。

- $0<k<\frac{1}{2}$：兩根之積為負，所以恰有一個正根。**2 個交點**。

- $k = \frac{1}{2}$：$(*)$ 變為 $u^2 - \frac{7}{2}u = 0$，所以 $u = 0$ 或 $u = \frac{7}{2}$，得 $x = 0$ 及 $x = \pm\sqrt{7/2}$。**3 個交點**。
- $\frac{1}{2} < k < \frac{\sqrt{65}}{8}$：判別式為正，所以有兩個相異實根。它們的積與和都是正數，所以兩根皆為正。**4 個交點**。
- $k = \frac{\sqrt{65}}{8}$：有一個重根（repeated root）$u = 2 - k^2 = \frac{63}{64} > 0$，得 $x = \pm\frac{\sqrt{63}}{8}$。**2 個交點**。
- $k > \frac{\sqrt{65}}{8}$：沒有實根。**沒有交點**。

第 (ii)(b) 部分

由 (a) 可知，當 $0 < k \leq \frac{\sqrt{65}}{8}$ 時，直線 $y = k$ 與 C_2 相交，而 k 更大時則不相交。C_2 的方程只透過 y^2 涉及 y，所以負的 k 不會給出更高的點。因此 C_2 上最大的 y 坐標是 $\frac{\sqrt{65}}{8}$，在 $x = \pm\frac{\sqrt{63}}{8}$ 處取得。

在 C_1 上，最高點是兩個圓的頂點 $(\pm 1, 1)$。由於 $\frac{\sqrt{63}}{8} < \frac{\sqrt{64}}{8} = 1$，$C_2$ 的最高點比 C_1 的最高點**更接近 y 軸**（不過稍為高一點，因為 $\frac{\sqrt{65}}{8} > 1$）。

第 (ii)(c) 部分

假設 $A < 0$ 且 $B < 0$。由 $A < 0$ 得 $2x > x^2 + y^2 \geq 0$，所以 $x > 0$。由 $B < 0$ 得 $-2x > x^2 + y^2 \geq 0$，所以 $x < 0$。兩者互相矛盾，所以 A 和 B 不可能同時為負。（從幾何上看，兩個開圓盤（open discs）互不重疊。）

在 C_2 上有 $AB = \frac{1}{16} > 0$，所以 A 和 B 都不為零，且同號。它們不可能同時為負，所以兩者皆為正。$A > 0$ 表示 $(x-1)^2 + y^2 > 1$，即該點嚴格位於以 $(1, 0)$ 為圓心的圓之外。同理，$B > 0$ 表示該點嚴格位於以 $(-1, 0)$ 為圓心的圓之外。因此 C_2 上每一點都位於兩個圓之外：C_2 完全位於 C_1 之外。

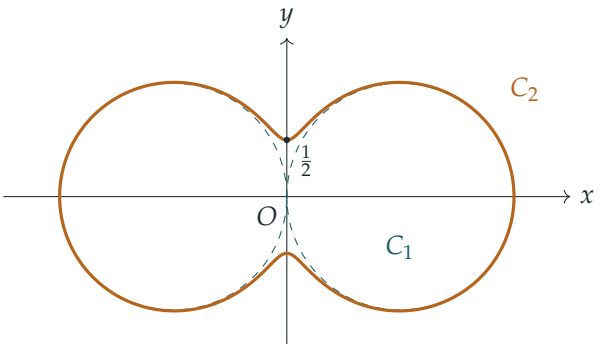
第 (ii)(d) 部分

有助描繪 C_2 的特徵：

- 由於方程中只出現 x^2 和 y^2，曲線關於兩條坐標軸都對稱（symmetric）。
- 在 $y = 0$ 上，$(*)$ 給出 $u = 2 + \frac{\sqrt{65}}{4}$，所以 C_2 與 x 軸相交於 $x = \pm\sqrt{2 + \frac{\sqrt{65}}{4}} \approx \pm 2.004$，剛好在 ± 2 之外。
- 在 $x = 0$ 上，$k^4 = \frac{1}{16}$，所以 C_2 與 y 軸相交於 $(0, \pm\frac{1}{2})$。
- 它的最高點和最低點是 $\left(\pm\frac{\sqrt{63}}{8}, \pm\frac{\sqrt{65}}{8}\right) \approx (\pm 0.99, \pm 1.01)$。

(a) 中的交點數目揭示了曲線的形狀。當 $|y| < \frac{1}{2}$ 時只有兩個交點（外側兩邊）。當 $\frac{1}{2} <$

$|y| < \frac{\sqrt{65}}{8}$ 時有四個交點，所以曲線在兩個隆起之間向下凹至 $(0, \pm\frac{1}{2})$。因此 C_2 是一條包圍兩個圓的單一閉合「花生形」曲線，在 y 軸處向內收窄。



（把 C_2 寫成極坐標形式（polar form），得 $r^2 = 2\cos^2\theta + \sqrt{4\cos^4\theta + \frac{1}{16}}$，上圖的曲線正是這樣畫出來的。）

驗算

- 當 $k = \frac{\sqrt{65}}{8}$ 時，判別式 $\frac{65}{16} - 4k^2$ 等於零，與曲線的頂部吻合。重根 $u = \frac{63}{64}$ 給出 $x^2 + y^2 = \frac{128}{64} = 2$ 及 $4x^2 = \frac{63}{16}$，而 $2^2 - \frac{63}{16} = \frac{1}{16}$ 確實成立。
- 點 $(0, \frac{1}{2})$：$A = B = \frac{1}{4}$，所以 $AB = \frac{1}{16}$。
- 用電腦計算 $y = k$ 與 C_2 的交點數目，對於 $k = 0.1$、0.49、0.51、1.0、1.007 和 1.01，分別得到 2、2、4、4、4 和 0 個交點；而數值搜尋得出最大高度為 $1.00778 \approx \frac{\sqrt{65}}{8}$，位於 $x \approx 0.9922 \approx \frac{\sqrt{63}}{8}$。

常見錯誤

- 把 $u = 0$ 當作給出兩個交點：$x = \pm\sqrt{0}$ 只是一個點，這就是為甚麼 $k = \frac{1}{2}$ 給出 3 個交點而不是 4 個。
- 計算交點數目時遺漏了相切（tangency）的情況 $k = \frac{\sqrt{65}}{8}$。
- 在 (c) 中只得出「A 和 B 同號」，而沒有排除兩者同時為負的情況——而這正是前半部分的重點所在。

STEP 之外

C_2 屬於曲線族 $(x^2+y^2)^2-4x^2=c$，即函數 AB 的等值曲線（level curves）。隨着 c 增大，曲線的形狀會改變：先是兩個位於圓內的獨立卵形（當 $c<0$），然後在 $c=0$ 時成為 8 字形（figure-of-eight）曲線 C_1，之後成為單一的花生形，而當 $c\geq 4$ 時其凹陷便會消失。拓撲（topology）的改變恰好發生在 AB 於原點的臨界點（critical point）所對應的水平上。追蹤等值曲線在經過臨界點時如何變化，正是莫爾斯理論（Morse theory）的出發點；而與此密切相關的卡西尼卵形線（Cassini ovals）——其 8 字形成員就是伯努利雙紐線（lemniscate of Bernoulli）——也有完全相同的表現。Siklos 的 *Advanced Problems in Mathematics*（《數學進階問題》）收錄了更多類似 STEP 風格、描繪這類隱函數曲線（implicit curves）的題目。

Beyond STEP 詳細解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hant/。解答文字採用 CC0 1.0；題目本身版權屬 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予轉載。由機器從英文翻譯而成；尚未經審閱。