詳細解答

STEP II 2024，第 6 題

純數學 • 二項式級數的係數

> **STEP II 2024，第 6 題**
>
> 繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 OCR 提供下載的 2024 年 STEP 試卷（zip 檔案）內的 STEP II 試卷：
>
> www.ocr.org.uk/Images/725753-2024-past-papers.zip

關鍵思路

每一部分都靠相鄰項之比（ratio of successive terms）推動。二項式係數（binomial coefficient）$\binom{2n}{n}$ 和二項級數（binomial series）的係數都是乘積，每走一步便多乘一個因子，所以把第 n 項與第 $(n-1)$ 項比較，就得到一條簡短的遞推關係（recurrence）。兩個數列若服從同一條遞推關係，而且首項相同，它們便相等。最後的恆等式則來自把 $(1-x)^{-3/2}$ 寫成 $(1-x)^{-1/2}\times(1-x)^{-1}$ 並比較係數（comparing coefficients），因為乘以 $(1-x)^{-1}=1+x+x^2+\cdots$ 會把一列係數變成它的累計和。

解答

第 (i) 部分

設 $P(n)$ 為命題 $T_n=\dfrac{1}{2^{2n}}\binom{2n}{n}$。

基本情況（base case）。$P(0)$ 成立，因為 $\frac{1}{2^0}\binom{0}{0}=1=T_0$。

歸納步驟（inductive step）。假設對某個 $n\geq 1$，$P(n-1)$ 成立。由於 $\binom{2n}{n}=\dfrac{(2n)!}{n!\,n!}$ 及 $\binom{2n-2}{n-1}=\dfrac{(2n-2)!}{(n-1)!\,(n-1)!}$，兩者相除得

$$\binom{2n}{n}=\frac{(2n)(2n-1)}{n\cdot n}\binom{2n-2}{n-1}=\frac{2(2n-1)}{n}\binom{2n-2}{n-1}.$$

於是，利用遞推關係及 $P(n-1)$，

$$\begin{aligned} T_n = \frac{2n-1}{2n}\,T_{n-1} &= \frac{2n-1}{2n}\cdot\frac{1}{2^{2n-2}}\binom{2n-2}{n-1} \\ &= \frac{2n-1}{2n}\cdot\frac{1}{2^{2n-2}}\cdot\frac{n}{2(2n-1)}\binom{2n}{n} \\ &= \frac{1}{4\cdot 2^{2n-2}}\binom{2n}{n} = \frac{1}{2^{2n}}\binom{2n}{n}, \end{aligned}$$

這正是 $P(n)$。由歸納法（induction），$P(n)$ 對所有 $n = 0, 1, 2, \ldots$ 皆成立。

第 (ii) 部分

由一般指數的二項式定理（binomial theorem for a general index），$(1-x)^{-1/2}$ 中 x^r 的係數為

$$a_r = \frac{\left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{3}{2}\right)\cdots\left(-\frac{1}{2}-r+1\right)}{r!}(-1)^r = \frac{\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{2}\cdots\frac{2r-1}{2}}{r!},$$

因為分子中 r 個因子各自為負，而 $(-x)^r$ 帶來的 $(-1)^r$ 正好抵消這些符號。由 a_{r-1} 到 a_r，分子多了一個因子 $\frac{2r-1}{2}$，分母多了一個因子 r，所以當 $r \geq 1$ 時

$$\frac{a_r}{a_{r-1}} = \frac{(2r-1)/2}{r} = \frac{2r-1}{2r}, \qquad \text{即} \qquad a_r = \frac{2r-1}{2r}\,a_{r-1}.$$

> ? **想一想** 為甚麼這條遞推關係能立即推出 $a_r = T_r$？

兩個數列的首項都是 1（因為常數項 $a_0 = 1$，而 $T_0 = 1$），而且由第 $r-1$ 項到第 r 項遵從同一規則。一行歸納便能完成：若 $a_{r-1} = T_{r-1}$，則 $a_r = \frac{2r-1}{2r}a_{r-1} = \frac{2r-1}{2r}T_{r-1} = T_r$。所以對所有 $r \geq 0$ 都有 $a_r = T_r$，再由 (i)，

$$a_r = \frac{1}{2^{2r}}\binom{2r}{r}.$$

第 (iii) 部分

同樣地，$(1-x)^{-3/2}$ 中 x^r 的係數為

$$b_r = \frac{\frac{3}{2}\cdot\frac{5}{2}\cdots\frac{2r+1}{2}}{r!}.$$

a_r 與 b_r 的分子都是 r 個連續「半奇數」的乘積。b_r 的乘積少了 a_r 的第一個因子 $\frac{1}{2}$，而在末端多了一個因子 $\frac{2r+1}{2}$。$r!$ 互相約去，所以

$$\frac{b_r}{a_r} = \frac{(2r+1)/2}{1/2} = 2r+1.$$

（當 $r = 0$ 時，兩個乘積都是空乘積，$b_0 = a_0 = 1$，與此相符。）因此

$$b_r = (2r+1)\,a_r = \frac{2r+1}{2^{2r}}\binom{2r}{r}, \qquad r = 0, 1, 2, \ldots.$$

第 (iv) 部分

由於 $(1-x)^{-3/2} = (1-x)^{-1/2}(1-x)^{-1}$，且 $(1-x)^{-1} = \sum_{s\geq 0} x^s$，

$$\sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n = \left(\sum_{r=0}^{\infty} a_r x^r\right)\left(\sum_{s=0}^{\infty} x^s\right).$$

在右方，x^n 項來自從第一個括號選取 $a_r x^r$、從第二個括號選取 x^{n-r}，其中 $r = 0, 1, \ldots, n$。每一種選法的係數都是 $a_r \cdot 1$，所以 x^n 的係數為 $a_0 + a_1 + \cdots + a_n$。比較兩邊 x^n 的係數，

$$b_n = \sum_{r=0}^{n} a_r.$$

代入 (ii) 及 (iii) 的公式，得

$$\frac{2n+1}{2^{2n}}\binom{2n}{n} = \sum_{r=0}^{n} \frac{1}{2^{2r}}\binom{2r}{r},$$

即所求。（上述推導對 $n = 0$ 亦成立，此時兩邊都等於 1。）

驗算

- 小數值情況：$a_0, a_1, a_2, a_3 = 1, \frac{1}{2}, \frac{3}{8}, \frac{5}{16}$，與 $\binom{2r}{r}/4^r = 1, \frac{2}{4}, \frac{6}{16}, \frac{20}{64}$ 吻合。
- 當 $n = 3$，(iv) 的左邊為 $\frac{7\cdot 20}{64} = \frac{35}{16}$，右邊為 $1 + \frac{1}{2} + \frac{3}{8} + \frac{5}{16} = \frac{35}{16}$。
- 直接展開，$(1-x)^{-3/2} = 1 + \frac{3}{2}x + \frac{15}{8}x^2 + \cdots$，而 $b_2 = 5 \cdot \frac{3}{8} = \frac{15}{8}$。
- 以精確分數進行的電腦驗算確認 (i)–(iv) 對每個 $n \leq 29$ 皆成立。在 $x = 0.3$ 處把兩個級數各自的首 30 項相加，得 1.19523 及 1.70747，分別與 $(0.7)^{-1/2}$ 及 $(0.7)^{-3/2}$ 相符。

常見錯誤

- 二項式係數的符號錯誤：$\binom{-1/2}{r}$ 的符號正負交替，但 $(-x)^r$ 帶來的因子 $(-1)^r$ 抵消了這一點，所以每個 a_r 和 b_r 都是正數。
- 忘記基本情況，或單憑遞推關係便斷言 $a_r = T_r$：首項 $a_0 = T_0 = 1$ 也必須相符。

STEP 之外

把冪級數（power series）乘以 $(1-x)^{-1}$ 以得出部分和（partial sums），是生成函數（generating functions）的基本工具；生成函數把關於數列的問題轉化為冪級數的代數運

算。數 $\binom{2n}{n}/4^n$ 亦出現在概率（probability）之中：它是一枚公平硬幣擲 $2n$ 次恰好出現 n 次正面的概率，而斯特林公式（Stirling's formula）顯示當 n 很大時，它的表現約為 $1/\sqrt{\pi n}$。Siklos 的 *Advanced Problems in Mathematics*（《數學進階難題》）收錄更多同類題目，而 Grimmett 與 Welsh 的 *Probability: An Introduction*（《概率導論》）則有系統地發展生成函數。

Beyond STEP 詳細解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hant/。解答文字採用 CC0 1.0；題目本身版權屬 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予轉載。由機器從英文翻譯而成；尚未經審閱。