詳細解答

STEP II 2024，第 5 題

純數學 • 值域與丟番圖方程

STEP II 2024，第 5 題

繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 OCR 提供下載的 2024 年 STEP 試卷（zip 檔案）內的 STEP II 試卷：

www.ocr.org.uk/Images/725753-2024-past-papers.zip

關鍵思路

把多項式的自變量平移一個整數，它在 $\mathbb{Z}$ 上的值域（range）並不會改變，所以我們透過配方（completing the square）（或「配立方」）把每個函數化成最簡單的平移形式。這樣，問兩個值域是否相交，就變成問一條含兩個整數未知數的方程是否有解；而竅門在於把方程整理成兩個整數之積 = 一個固定的小數的形式。一個小數的因數分解只有寥寥幾種可能，我們可以逐一檢查。

解答

第 (i) 部分

配方得

$$\mathrm{f}_1(n) = (n+3)^2 + 2 = \mathrm{F}_1(n+3).$$

當 n 取遍 $\mathbb{Z}$ 時，$m = n+3$ 亦然（每個整數 m 都會出現，取 $n = m-3$ 即可）。因此 f_1 的值域是 $\{m^2+2 : m \in \mathbb{Z}\}$，正好就是 F_1 的值域。這就是所要證明的。

第 (ii) 部分

同理 $\mathrm{g}_1(n) = (n-1)^2 + 4$，故按同樣的論證，$\mathrm{g}_1$ 的值域是 $\{k^2+4 : k \in \mathbb{Z}\}$。由第 (i) 部分，若有公共值，便需要整數 m、k 使得

$$m^2 + 2 = k^2 + 4 \quad \Longleftrightarrow \quad (m-k)(m+k) = 2.$$

由於 $m-k$ 與 $m+k$ 相差 $2k$，是偶數，所以兩者奇偶性（parity）相同。若兩者皆為奇數，其積為奇數，不可能等於 2。若兩者皆為偶數，其積是 4 的倍數，同樣不可能等於

2。因此這樣的 m、k 並不存在，兩個值域的交集（intersection）為空。

第 (iii) 部分

配方得

$$\mathrm{f}_2(n) = (n-1)^2 - 7, \qquad \mathrm{g}_2(n) = (n-2)^2 - 2,$$

所以兩個值域分別是 $\{m^2-7\}$ 和 $\{k^2-2\}$，其中 m、k 取遍 $\mathbb{Z}$。公共值需要

$$m^2 - 7 = k^2 - 2 \quad \Longleftrightarrow \quad (m-k)(m+k) = 5.$$

由於 5 是質數（prime），數對 $(m-k,\, m+k)$ 只能是 $(1,5)$、$(5,1)$、$(-1,-5)$、$(-5,-1)$ 其中之一。兩個因數相加得 $2m = \pm 6$，相減得 $2k = \pm 4$，所以在每種情況下都有 $m^2 = 9$ 及 $k^2 = 4$。公共值為

$$m^2 - 7 = 9 - 7 = 2 = 4 - 2 = k^2 - 2.$$

所以同時屬於兩個值域的整數只有 $\boxed{2}$。驗證一下：$\mathrm{f}_2(4) = \mathrm{f}_2(-2) = 2$，而 $\mathrm{g}_2(4) = \mathrm{g}_2(0) = 2$。

第 (iv) 部分

對 p 配方，

$$p^2 + pq + q^2 = \left(p + \tfrac{1}{2}q\right)^2 + \tfrac{3}{4}q^2 \geq 0,$$

因為兩項都是平方乘以正常數。（等號只在 $q = 0$ 且 $p = 0$ 時成立。）

至於三次函數，我們把 f_3 與 $(n-1)^3 = n^3 - 3n^2 + 3n - 1$ 作比較：

$$\mathrm{f}_3(n) = (n-1)^3 + 4n + 1 = (n-1)^3 + 4(n-1) + 5.$$

所以設 $m = n - 1$（它同樣取遍整個 $\mathbb{Z}$），則 f_3 的值域是 $\{m^3 + 4m + 5\}$，而 g_3 的值域是 $\{k^3 + 4k - 6\}$。公共值需要整數 m、k 使得

$$\begin{aligned} & m^3 + 4m + 5 = k^3 + 4k - 6 \\ \Longleftrightarrow \quad & (k^3 - m^3) + 4(k-m) = 11 \\ \Longleftrightarrow \quad & (k-m)\left(k^2 + km + m^2 + 4\right) = 11. \end{aligned}$$

想一想 本部分開首的不等式對這條方程有甚麼幫助？

在該不等式中取 $p = k$、$q = m$，便得 $k^2 + km + m^2 + 4 \geq 4$。特別地，第二個因式是正整數，所以 $k - m$ 亦必須是正數。由於 11 是質數，只有兩個可能：

- $k-m=11$ 且 $k^2+km+m^2+4=1$。這不可能，因為第二個因式至少是 4。
- $k-m=1$ 且 $k^2+km+m^2+4=11$。

在第二種情況下，代入 $k=m+1$：

$$\begin{aligned}(m+1)^2+m(m+1)+m^2&=7\\ 3m^2+3m+1&=7\\ m^2+m-2=(m+2)(m-1)&=0,\end{aligned}$$

所以 $m=1$（此時 $k=2$）或 $m=-2$（此時 $k=-1$）。對應的值為

$$m=1:\ 1+4+5=10,\qquad m=-2:\ -8-8+5=-11.$$

所以同時屬於兩個值域的整數是 $\boxed{10\text{ 和 }-11}$。

回到原來的變量：$f_3(2)=8-12+14=10$ 而 $g_3(2)=8+8-6=10$；另外 $f_3(-1)=-1-3-7=-11$ 而 $g_3(-1)=-1-4-6=-11$。有趣的是，兩個公共值都來自相同的輸入 n。

驗算

- 如上文般代回驗證：f_2 和 g_2 在 $n=4$ 時都取值 2，而 f_3、g_3 在 $n=2$（值為 10）及 $n=-1$（值為 -11）時相等。
- 列出一些較小的值，可快速檢查第 (ii) 部分是否合理：f_1 給出 $2,3,6,11,18,27,\ldots$，而 g_1 給出 $4,5,8,13,20,29,\ldots$。兩個列表都沒有對方的數。
- 以電腦搜尋所有 $|n|\le 3000$，證實 (i) 的兩個值域相同、(ii) 的兩個值域不相交（disjoint），而唯一的公共值是 (iii) 中的 2，以及 (iv) 中的 10、-11。

常見錯誤

- 以同一個 n 解 $f(n)=g(n)$ 來找公共值。兩個輸入可以不同，所以我們需要兩個獨立的未知數。在 (iii) 中，$f_2(n)=g_2(n)$ 碰巧給出正確答案，但方法是錯的。
- 在 (ii) 中，只論證 $(m-k)(m+k)=2$ 迫使 $\{m-k,m+k\}=\{1,2\}$，卻忘記了負數因數對。奇偶性論證可一次過處理所有情況。
- 在 (iv) 中，忘記排除 11×1 這個因數分解（factorisation）。正是那條不等式把它排除掉。

STEP 之外

像 $m^2 - k^2 = 5$ 和 $k^3 + 4k = m^3 + 4m + 11$ 這類只計算整數解的方程，稱為*丟番圖方程*（Diophantine equations）。把一邊因式分解，再利用另一邊的因數，是解這類方程最有力的初等工具之一。(ii) 中的奇偶性技巧可以推廣：一個整數可表示為兩個平方數之差，當且僅當它是奇數或 4 的倍數。若想深入了解，Davenport 的 *The Higher Arithmetic*（《高等算術》）是一本極佳的大學一年級數論（number theory）入門書。

Beyond STEP 詳細解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hant/。解答文字採用 CC0 1.0；題目本身版權屬 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予轉載。由機器從英文翻譯而成；尚未經審閱。