詳細解答

STEP II 2024，第 4 題

純數學 • 向量與角平分線

> **STEP II 2024，第 4 題**
>
> 繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 OCR 提供下載的 2024 年 STEP 試卷（zip 檔案）內的 STEP II 試卷：
>
> www.ocr.org.uk/Images/725753-2024-past-papers.zip

關鍵思路

把所有向量都縮放成單位向量（unit vector）。若 $\hat{\mathbf{x}}$ 和 $\hat{\mathbf{y}}$ 分別是沿 OX 和 OY 方向的單位向量，那麼 $\hat{\mathbf{x}}+\hat{\mathbf{y}}$ 就是一個菱形（rhombus）的對角線，而菱形的對角線平分（bisect）其所在的角。題目給出的 $\mathbf{b}$ 只不過是 $\hat{\mathbf{x}}+\hat{\mathbf{y}}$ 的正數倍，所以每個平分向量（bisecting vector）都是兩個單位向量之和的正數倍。這樣一來，第 (ii) 部分的點積（dot product）就會化簡成同一個對稱的式子。

解答

全文以 θ 表示角 XOY。由於 O、X、Y 不共線（collinear），$0<\theta<\pi$，所以

$$-1<\cos\theta<1.$$

下面兩個嚴格不等式都會用到。

第 (i)(a) 部分

設 $\hat{\mathbf{x}}=\mathbf{x}/|\mathbf{x}|$ 及 $\hat{\mathbf{y}}=\mathbf{y}/|\mathbf{y}|$，於是 $\hat{\mathbf{x}}\cdot\hat{\mathbf{y}}=\cos\theta$。那麼

$$\mathbf{b}=|\mathbf{x}|\mathbf{y}+|\mathbf{y}|\mathbf{x}=|\mathbf{x}||\mathbf{y}|\,(\hat{\mathbf{x}}+\hat{\mathbf{y}}).$$

這是 $\mathbf{x}$ 與 $\mathbf{y}$ 的線性組合，所以它位於平面 XOY 上。它不是零向量，因為若 $\hat{\mathbf{x}}+\hat{\mathbf{y}}=\mathbf{0}$，則 $\hat{\mathbf{y}}=-\hat{\mathbf{x}}$，那就會令 O、X、Y 共線。

現在比較兩個角。我們有

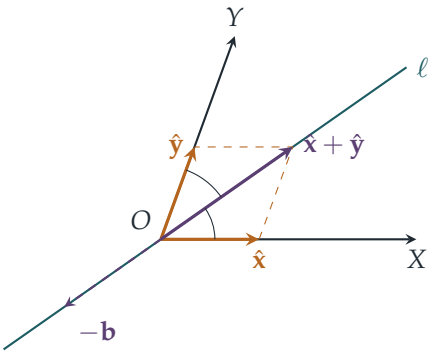
$$\mathbf{b}\cdot\hat{\mathbf{x}}=|\mathbf{x}||\mathbf{y}|\,(1+\cos\theta)=\mathbf{b}\cdot\hat{\mathbf{y}},$$

所以 $\mathbf{b}$ 與 $\overrightarrow{OX}$ 的夾角 α 以及 $\mathbf{b}$ 與 $\overrightarrow{OY}$ 的夾角 β 滿足

$$\cos\alpha = \frac{\mathbf{b}\cdot\hat{\mathbf{x}}}{|\mathbf{b}|} = \frac{|\mathbf{x}||\mathbf{y}|(1+\cos\theta)}{|\mathbf{b}|} = \frac{\mathbf{b}\cdot\hat{\mathbf{y}}}{|\mathbf{b}|} = \cos\beta.$$

兩個角都在 $[0,\pi]$ 之內，而餘弦函數在這區間上是一一對應（one-to-one）的，所以 $\alpha = \beta$。此外 $1+\cos\theta > 0$，所以 $\cos\alpha > 0$，兩個角都小於 90°。因此 $\mathbf{b}$ 是角 XOY 的一個平分向量。

其他平分向量。



由於 $\hat{\mathbf{x}}$ 與 $\hat{\mathbf{y}}$ 長度相等，它們所張成的平行四邊形（parallelogram）是一個菱形，其對角線 $\hat{\mathbf{x}}+\hat{\mathbf{y}}$ 把角 XOY 分成相等的兩半。在平面 XOY 上，與 OX 和 OY 成等角的方向，只有沿這條對角線 ℓ 的兩個方向。若把一個向量從 ℓ 轉開，它就會靠近其中一邊而遠離另一邊，兩個角便不再相等。沿著 ℓ，$\mathbf{b}$ 的方向與每一邊所成的角為 $\frac{1}{2}\theta < 90°$；相反方向與每一邊所成的角為 $180° - \frac{1}{2}\theta > 90°$，因此要排除。所以任何平分向量都沿 ℓ 並與 $\mathbf{b}$ 同向，即它是 $\mathbf{b}$ 的正數倍。

同一論證的代數版本：平面上任何向量都可寫成 $\mathbf{v} = p\hat{\mathbf{x}} + q\hat{\mathbf{y}}$。兩角相等即 $\mathbf{v}\cdot\hat{\mathbf{x}} = \mathbf{v}\cdot\hat{\mathbf{y}}$，而

$$\mathbf{v}\cdot\hat{\mathbf{x}} - \mathbf{v}\cdot\hat{\mathbf{y}} = (p + q\cos\theta) - (p\cos\theta + q) = (p-q)(1-\cos\theta).$$

由於 $\cos\theta \neq 1$，這迫使 $p = q$，所以 $\mathbf{v} = p(\hat{\mathbf{x}}+\hat{\mathbf{y}})$。只有當 $p > 0$ 時，兩個角才是銳角。

第 (i)(b) 部分

點 B 位於直線 XY 上，當且僅當對某實數 t 有 $\overrightarrow{OB} = (1-t)\mathbf{x} + t\mathbf{y}$。我們需要

$$\lambda|\mathbf{y}|\,\mathbf{x} + \lambda|\mathbf{x}|\,\mathbf{y} = (1-t)\mathbf{x} + t\mathbf{y}.$$

由於 $\mathbf{x}$ 與 $\mathbf{y}$ 不平行，我們可以比較係數：$\lambda|\mathbf{y}| = 1-t$ 及 $\lambda|\mathbf{x}| = t$。兩式相加得

$$\lambda = \frac{1}{|\mathbf{x}|+|\mathbf{y}|}, \qquad t = \frac{|\mathbf{x}|}{|\mathbf{x}|+|\mathbf{y}|}.$$

於是 $\overrightarrow{XB} = t(\mathbf{y}-\mathbf{x})$ 及 $\overrightarrow{BY} = (1-t)(\mathbf{y}-\mathbf{x})$，其中 $0 < t < 1$，所以 B 位於 X 與 Y 之間，且

$$XB : BY = t : (1-t) = |\mathbf{x}| : |\mathbf{y}| = OX : OY.$$

這就是角平分線定理（angle bisector theorem）：從 O 出發的角平分線按相鄰兩邊之比分割 XY。

第 (i)(c) 部分

這裏 $\overrightarrow{OB}$ 是 $\mathbf{b}$ 的非零倍數，所以 $OB \perp XY$ 即 $\mathbf{b}\cdot(\mathbf{y}-\mathbf{x}) = 0$。利用 $\mathbf{b} = |\mathbf{x}||\mathbf{y}|(\hat{\mathbf{x}}+\hat{\mathbf{y}})$ 及 $\mathbf{y}-\mathbf{x} = |\mathbf{y}|\hat{\mathbf{y}} - |\mathbf{x}|\hat{\mathbf{x}}$，

$$\begin{aligned}\mathbf{b}\cdot(\mathbf{y}-\mathbf{x}) &= |\mathbf{x}||\mathbf{y}|(|\mathbf{y}|\cos\theta + |\mathbf{y}| - |\mathbf{x}| - |\mathbf{x}|\cos\theta)\\ &= |\mathbf{x}||\mathbf{y}|\,(|\mathbf{y}| - |\mathbf{x}|)(1+\cos\theta).\end{aligned}$$

由於 $|\mathbf{x}|, |\mathbf{y}| > 0$ 且 $1+\cos\theta > 0$，這式只有在 $|\mathbf{y}| = |\mathbf{x}|$ 時才等於零。即 $OX = OY$，三角形 XOY 是等腰（isosceles）三角形。

第 (ii) 部分

設 $\mathbf{p}$、$\mathbf{q}$、$\mathbf{r}$ 分別為沿 $\overrightarrow{OP}$、$\overrightarrow{OQ}$、$\overrightarrow{OR}$ 的單位向量。四點中任何三點都不共線，特別是 O, P, Q 不共線，所以第 (i)(a) 部分適用於每一個角。因此所選的平分向量必定是

$$\mathbf{u} = \alpha(\mathbf{p}+\mathbf{q}), \qquad \mathbf{v} = \beta(\mathbf{q}+\mathbf{r}), \qquad \mathbf{w} = \gamma(\mathbf{r}+\mathbf{p}),$$

其中 $\alpha, \beta, \gamma > 0$，而且三者都不是零向量。

> **想一想** 三個平分向量都是任意的正數倍。我們怎樣才能同時對三個角下結論？

比例因子都是正數，所以不會改變點積的正負號。而我們只需要正負號：兩個非零向量的夾角是銳角、直角還是鈍角，取決於它們的點積是正、零還是負。記 $S = \mathbf{p}\cdot\mathbf{q} + \mathbf{q}\cdot\mathbf{r} + \mathbf{r}\cdot\mathbf{p}$。利用 $\mathbf{q}\cdot\mathbf{q} = 1$，

$$\mathbf{u}\cdot\mathbf{v} = \alpha\beta\,(\mathbf{p}\cdot\mathbf{q} + \mathbf{p}\cdot\mathbf{r} + \mathbf{q}\cdot\mathbf{q} + \mathbf{q}\cdot\mathbf{r}) = \alpha\beta\,(1+S).$$

完全同理，利用 $\mathbf{r}\cdot\mathbf{r} = 1$ 及 $\mathbf{p}\cdot\mathbf{p} = 1$，

$$\mathbf{v}\cdot\mathbf{w} = \beta\gamma\,(1+S), \qquad \mathbf{w}\cdot\mathbf{u} = \gamma\alpha\,(1+S).$$

由於 $\alpha\beta$、$\beta\gamma$、$\gamma\alpha$ 全是正數，三個點積的正負號都與 $1+S$ 相同。所以當 $1+S > 0$ 時三個角都是銳角，當 $1+S = 0$ 時都是直角，當 $1+S < 0$ 時都是鈍角。 ■

驗算

- 取 $\mathbf{x} = (3,0,0)$ 及 $\mathbf{y} = (0,4,0)$。那麼 $\mathbf{b} = (12,12,0)$，它平分該直角。取 $\lambda = \frac{1}{7}$ 得 $B = (\frac{12}{7}, \frac{12}{7}, 0)$，它位於 $\frac{x}{3} + \frac{y}{4} = 1$ 上，且 $XB : BY = 3 : 4$。
- 第 (ii) 部分的三種情況確實都會出現。若 P、Q、R 在同一平面上兩兩相隔 120°，則 $S = -\frac{3}{2}$，而各平分向量之間的夾角為 120°（鈍角）。若 $\mathbf{p}, \mathbf{q}, \mathbf{r}$ 指向一個以 O 為中心的正四面體（regular tetrahedron）的三個頂點，則每個點積都是 $-\frac{1}{3}$，所以 $S = -1$，三個角都是直角。三個幾乎平行的向量則給出銳角。
- 兩部分的結果亦已用電腦在數以千計的隨機配置上驗證過。

常見錯誤

- 忘記必須用到 $\cos\theta \neq \pm 1$。(i)(c) 中的因子 $1 + \cos\theta$ 以及唯一性論證中的因子 $1 - \cos\theta$ 之所以不為零，全因各點不共線。
- 在第 (ii) 部分，把平分向量當作某些特定向量，例如 $|\mathbf{x}|\mathbf{y} + |\mathbf{y}|\mathbf{x}$。題目容許它們自由選取，所以你必須引用第 (i)(a) 部分，才能說它們是這些向量的正數倍。

STEP 之外

把向量寫成 $|\mathbf{x}|\hat{\mathbf{x}}$ 並以單位向量運算，是一個在整個線性代數（linear algebra）中都大有裨益的習慣。(ii) 中的恆等式是 $\mathbf{p}, \mathbf{q}, \mathbf{r}$ 的格拉姆矩陣（*Gram matrix*）幾何的一小部分，該矩陣的元素就是這些向量兩兩之間的點積。由 $|\mathbf{p} + \mathbf{q} + \mathbf{r}|^2 = 3 + 2S \geq 0$ 可知 $S \geq -\frac{3}{2}$，所以鈍角的情況是有界限的。Strang 的 *Introduction to Linear Algebra*（《線性代數導論》）正是以這種精神講解點積、投影和格拉姆矩陣。

Beyond STEP 詳細解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hant/。解答文字採用 CC0 1.0；題目本身版權屬 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予轉載。由機器從英文翻譯而成；尚未經審閱。