詳細解答

STEP II 2024，第 3 題

純數學 • 半角正切代換

STEP II 2024，第 3 題

繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 OCR 提供下載的 2024 年 STEP 試卷（zip 檔案）內的 STEP II 試卷：

www.ocr.org.uk/Images/725753-2024-past-papers.zip

關鍵思路

第 (i) 部分建立了一個對照關係：圓上角度為 ϕ 的點，對應從 N 經過該點的直線與 y 軸相交處的高度 $\tan\frac{1}{2}\phi$。把這個對應反過來用，使每個高度 q 都恰好對應圓上的一個點。這樣，題目中每個關於 q 的函數都會變成一條關於 $\frac{1}{2}\theta$ 的三角恆等式，我們便可以直接看出角度 θ 的變化，從而得知點的變化。

解答

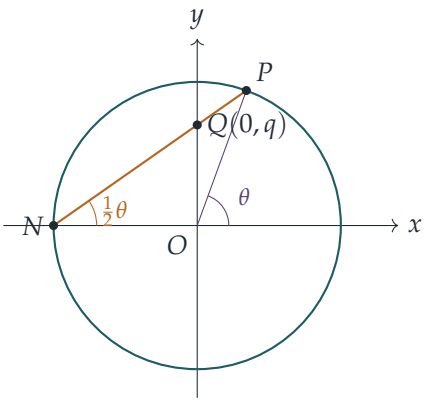
第 (i) 部分

由於 $P \neq N$，我們有 $\cos\theta \neq -1$，所以直線 NP 不是鉛垂線。它的斜率（gradient）是

$$\frac{\sin\theta - 0}{\cos\theta - (-1)} = \frac{2\sin\frac{1}{2}\theta\cos\frac{1}{2}\theta}{2\cos^2\frac{1}{2}\theta} = \tan\tfrac{1}{2}\theta,$$

這裏用了倍角公式（double-angle formulas）$\sin\theta = 2\sin\frac{1}{2}\theta\cos\frac{1}{2}\theta$ 和 $1+\cos\theta = 2\cos^2\frac{1}{2}\theta$（而且 $\cos\frac{1}{2}\theta \neq 0$，因為 $|\frac{1}{2}\theta| < \frac{1}{2}\pi$）。該直線通過 $(-1,0)$，所以它是 $y = (x+1)\tan\frac{1}{2}\theta$；代入 $x=0$ 便得 $q = \tan\frac{1}{2}\theta$，即所求。

從幾何角度看，這就是圓周角（angle at the circumference）：由於 P 在圓心所對的角為 θ，弦 NP 在 N 處與 x 軸所成的角為 $\frac{1}{2}\theta$。



反過來：由高度得出點

我們會不斷用到逆命題（converse）。給定任意實數 q，通過 N 和 $(0,q)$ 的直線是 $y = q(x+1)$。代入 $x^2+y^2=1$：

$$x^2 - 1 + q^2(x+1)^2 = 0 \iff (x+1)\left[(1+q^2)x - (1-q^2)\right] = 0.$$

根 $x=-1$ 對應 N，所以另一個交點是

$$\left(\frac{1-q^2}{1+q^2},\ \frac{2q}{1+q^2}\right).$$

若 $q = \tan\frac{1}{2}\phi$，則由 t 公式（t-formulas）可知此點為 $(\cos\phi, \sin\phi)$。由於 $\phi \mapsto \tan\frac{1}{2}\phi$ 是從 $(-\pi,\pi)$ 到 $\mathbb{R}$ 的雙射（bijection），我們得到以下結果。

對照表。若對任何角 ϕ（不一定在 $(-\pi,\pi)$ 內）有 $\tan\frac{1}{2}\phi = q$，則從 N 經過 $(0,q)$ 的直線與圓的另一個交點為 $(\cos\phi, \sin\phi)$。

這對每個 ϕ 都成立，因為把 ϕ 換成 $\phi \pm 2\pi$ 既不改變 $\tan\frac{1}{2}\phi$（它作為 $\frac{1}{2}\phi$ 的函數，週期為 π），也不改變該點。

第 (ii) 部分

(a) 由於 $\tan\frac{1}{4}\pi = 1$，由和角公式（addition formula）得

$$\tan\left(\tfrac{1}{2}\theta + \tfrac{1}{4}\pi\right) = \frac{\tan\frac{1}{2}\theta + 1}{1 - \tan\frac{1}{2}\theta} = \frac{1+q}{1-q} = \mathrm{f}_1(q),$$

這就是 $\tan\frac{1}{2}\left(\theta + \frac{1}{2}\pi\right)$，即所求。條件 $q \neq 1$ 意味着 $\theta \neq \frac{1}{2}\pi$，所以分母不為零。

(b) 由 (a)，Q_1 的高度是 $\tan\frac{1}{2}\phi$，其中 $\phi = \theta + \frac{1}{2}\pi$。由對照表，$P_1 = \left(\cos(\theta + \frac{1}{2}\pi), \sin(\theta + \frac{1}{2}\pi)\right)$。所以

P_1 是P 的像，變換為繞O 逆時針旋轉（rotation）$\frac{1}{2}\pi$.

（被排除的值 $q = 1$ 對應 $\theta = \frac{1}{2}\pi$，這正是唯一一個在此旋轉下像為 N 本身的點。）

第 (iii) 部分

(a) P_2 是角度為 $\theta + \frac{1}{3}\pi$ 的點，所以應用第 (i) 部分（如有需要，先把角度化到 $(-\pi, \pi)$ 之內，這不會改變半角的 tan 值），並利用 $\tan\frac{1}{6}\pi = \frac{1}{\sqrt{3}}$：

$$\mathrm{f}_2(q) = \tan\left(\tfrac{1}{2}\theta + \tfrac{1}{6}\pi\right) = \frac{q + \frac{1}{\sqrt{3}}}{1 - \frac{q}{\sqrt{3}}} = \frac{\sqrt{3}q + 1}{\sqrt{3} - q}.$$

條件 $q \neq \sqrt{3}$ 即 $\theta \neq \frac{2}{3}\pi$，這恰好是 P_2 會等於 N、以致直線 NP_2 不存在的情況。

(b) 這次把 $\tan\frac{1}{4}\pi = 1$ 用在差角公式上：

$$\mathrm{f}_3(q) = \frac{1-q}{1+q} = \frac{\tan\frac{1}{4}\pi - \tan\frac{1}{2}\theta}{1 + \tan\frac{1}{4}\pi\tan\frac{1}{2}\theta} = \tan\left(\tfrac{1}{4}\pi - \tfrac{1}{2}\theta\right) = \tan\tfrac{1}{2}\left(\tfrac{1}{2}\pi - \theta\right).$$

由對照表，P_3 是角度為 $\frac{1}{2}\pi - \theta$ 的點，即 $(\sin\theta, \cos\theta)$。P 的坐標互換了，所以

$$P_3 \text{ 是}P \text{ 的反射（reflection），鏡線為} y = x.$$

(c)

> **想一想** f_2^{-1} 對角度做了甚麼？

由 (a)，對每個角 ϕ，f_2 都把 $\tan\frac{1}{2}\phi$ 映射到 $\tan\frac{1}{2}(\phi + \frac{1}{3}\pi)$（計算過程從未用到 $\phi = \theta$）。因此 $\mathrm{f}_2\big(\tan\frac{1}{2}(\psi - \frac{1}{3}\pi)\big) = \tan\frac{1}{2}\psi$；又由於 f_2 是一對一（one-to-one）的（解 $s = \mathrm{f}_2(q)$ 得唯一的 $q = \frac{\sqrt{3}s-1}{s+\sqrt{3}}$，其中 $s \neq -\sqrt{3}$），

$$\mathrm{f}_2^{-1}\big(\tan\tfrac{1}{2}\psi\big) = \tan\tfrac{1}{2}\left(\psi - \tfrac{1}{3}\pi\right).$$

所以 f_2^{-1} 把角度轉回 $\frac{1}{3}\pi$。

現在逐步追蹤角度經過這三個步驟的變化。由於 $0 < q < 1$，我們有 $0 < \theta < \frac{1}{2}\pi$。

- f_2：角度 $\theta + \frac{1}{3}\pi \in (\frac{1}{3}\pi, \frac{5}{6}\pi)$。此時 $\mathrm{f}_2(q) > 0$，所以可以應用 f_3。
- f_3：角度 $\frac{1}{2}\pi - (\theta + \frac{1}{3}\pi) = \frac{1}{6}\pi - \theta \in (-\frac{1}{3}\pi, \frac{1}{6}\pi)$。這不是 $-\frac{2}{3}\pi$，所以高度不是 $-\sqrt{3}$，可以應用 f_2^{-1}。
- f_2^{-1}：角度 $\frac{1}{6}\pi - \theta - \frac{1}{3}\pi = -\theta - \frac{1}{6}\pi$。

所以 $\mathrm{f}_4(q) = \tan\frac{1}{2}\big(-\theta - \frac{1}{6}\pi\big)$，而由對照表，$P_4$ 是角度為 $-\frac{1}{6}\pi - \theta$ 的點。

關於通過 O、角度為 α 的直線作反射，會把角度為 θ 的點映射到角度為 $2\alpha-\theta$ 的點（鏡線平分這兩個方向）。這裏 $2\alpha=-\frac{1}{6}\pi$，所以

$$P_4 \text{ 是}P \text{ 的反射，鏡線通過}O\text{，其傾角為 } -\tfrac{1}{12}\pi\text{(從正}x\text{ 軸量起)，}$$

即直線 $y=-\tan\frac{1}{12}\pi\,x=-(2-\sqrt{3})\,x$。

這是合理的：先旋轉 $\frac{1}{3}\pi$，再關於 $y=x$ 反射，然後轉回去，等同於關於「把鏡線 $y=x$ 轉回 $\frac{1}{3}\pi$」後所得的直線作反射，而 $\frac{1}{4}\pi-\frac{1}{3}\pi=-\frac{1}{12}\pi$。明確地寫出來，設 $t=\tan\frac{1}{12}\pi=2-\sqrt{3}$，

$$\mathrm{f}_4(q)=-\tan\left(\tfrac{1}{2}\theta+\tfrac{1}{12}\pi\right)=-\frac{q+2-\sqrt{3}}{1-(2-\sqrt{3})q}.$$

驗算

- 在 (iii)(b) 中取 $\theta=\frac{1}{2}\pi$：$P=(0,1)$，$q=1$，$\mathrm{f}_3(1)=0$，所以 $Q_3=O$ 而 $P_3=(1,0)$，這確實是 $(0,1)$ 關於 $y=x$ 的反射。
- 對 (c) 取 $q=\frac{1}{2}$：$\mathrm{f}_2(\frac{1}{2})=\frac{\sqrt{3}+2}{2\sqrt{3}-1}\approx 1.5146$，接着 $\mathrm{f}_3\approx -0.2046$，然後 $\mathrm{f}_2^{-1}\approx -0.8868$，與封閉形式 $-\frac{\frac{1}{2}+2-\sqrt{3}}{1-\frac{1}{2}(2-\sqrt{3})}\approx -0.8868$ 吻合。
- 用電腦對 100 000 個隨機點 P 進行檢驗，在捨入誤差範圍內確認了以上每一個關係（旋轉 $\frac{1}{2}\pi$、f_2 的公式、關於 $y=x$ 的反射，以及關於傾角為 $-\frac{1}{12}\pi$ 的直線的反射）。

常見錯誤

- 斷言 P_1 位於角度 $\theta+\frac{1}{2}\pi$，卻沒有留意這個角度可能落在 $(-\pi,\pi)$ 之外；這之所以無礙，只是因為當 ϕ 改變 2π 時，$\tan\frac{1}{2}\phi$ 和該點都會重複。
- 在 (c) 中，把 f_2^{-1} 的旋轉方向弄反了（再加一次 $\frac{1}{3}\pi$），得出角度 $\frac{1}{2}\pi-\theta$，因而錯誤地令 P_4 與 P_3 相同。

STEP 之外

把角度為 θ 的點映射到 $q=\tan\frac{1}{2}\theta$ 的映射，就是把圓投影到一條直線上的球極投影（stereographic projection），而函數 f_1、f_2、f_3 都是莫比烏斯變換（Möbius transformations）$q\mapsto\frac{aq+b}{cq+d}$。圓的每一個旋轉和反射都會變成直線上的這類變換，而對稱變換的複合則對應 2×2 矩陣（matrices）$\left(\begin{smallmatrix}a&b\\c&d\end{smallmatrix}\right)$ 的乘法。Needham 的 *Visual Complex Analysis*（《可視化複分析》）把這幅圖景發展得非常精彩，並將其推廣到黎曼球面（Riemann sphere）。

Beyond STEP 詳細解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hant/。解答文字採用 CC0 1.0；題目本身版權屬 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予轉載。由機器從英文翻譯而成；尚未經審閱。