詳細解答

STEP II 2024，第 2 題

純數學 • 級數與積分

STEP II 2024，第 2 題

繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 OCR 提供下載的 2024 年 STEP 試卷（zip 檔案）內的 STEP II 試卷：

www.ocr.org.uk/Images/725753-2024-past-papers.zip

關鍵思路

第 (i) 部分把每個積分 $\int_0^1 x^m/(8+x^3)\,\mathrm{d}x$ 都化成一個級數（series），所以凡是由相同元素組成的級數，都是這些積分的組合。要求出第 (ii) 或 (iii) 部分的級數之和，可以把括號拆成形如 $1/(3k+m+1)$ 的項，再把對應的被積函數（integrand）合併成一個分式，然後積分。因式分解（factorisation）$8+x^3=(x+2)(x^2-2x+4)$ 正是令所得積分變得容易處理的關鍵。

解答

全題中記

$$I_m=\int_0^1 \frac{x^m}{8+x^3}\,\mathrm{d}x.$$

第 (i) 部分

先提出因子 8，再對 $|u|<1$ 利用 $(1+u)^{-1}=\sum_{k\ge 0}(-1)^k u^k$，並取 $u=x^3/8$，得

$$(8+x^3)^{-1}=\frac{1}{8}\Big(1+\frac{x^3}{8}\Big)^{-1}=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k x^{3k}}{8^{k+1}}=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{2^{3(k+1)}}\,x^{3k}.$$

此式在 $|x^3/8|<1$，即 $|x|<2$ 時成立。

現在乘以 x^m，然後在 $[0,1]$ 上逐項（term by term）積分；這個區間位於成立範圍之內（而且題目已說明不必理會收斂（convergence）問題）：

$$I_m=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{2^{3(k+1)}}\int_0^1 x^{3k+m}\,\mathrm{d}x=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{2^{3(k+1)}}\cdot\frac{1}{3k+m+1},$$

這是因為當 $n = 3k + m \geq 0$ 時，$\int_0^1 x^n \,\mathrm{d}x = 1/(n+1)$。這就是所求的結果。

第 (ii) 部分

三個分母 $3k+3$、$3k+2$ 和 $3k+1$ 分別是 $m = 2, 1, 0$ 時的 $3k+m+1$。因此由第 (i) 部分，該級數等於

$$I_2 - 2I_1 + 4I_0 = \int_0^1 \frac{x^2 - 2x + 4}{8 + x^3} \,\mathrm{d}x.$$

? **想一想** 為甚麼 $x^2 - 2x + 4$ 會跟某些東西約掉？

因為 $8 + x^3$ 是兩個立方數之和（sum of two cubes）：在 $a^3 + b^3 = (a+b)(a^2 - ab + b^2)$ 中取 $a = x$、$b = 2$，得

$$8 + x^3 = (x+2)(x^2 - 2x + 4).$$

因此被積函數化簡為 $\dfrac{1}{x+2}$，所以該級數等於 $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{x+2} \,\mathrm{d}x$，即為所求。最後，

$$\int_0^1 \frac{1}{x+2} \,\mathrm{d}x = \Big[\ln(x+2)\Big]_0^1 = \ln 3 - \ln 2 = \ln \tfrac{3}{2}.$$

第 (iii) 部分

首先把括號按 k 拆成部分分式（partial fractions）。設 $2k+1 = \alpha(3k+2) + \beta(3k+1)$。代入 $k = -\frac{1}{3}$ 得 $\frac{1}{3} = \alpha$；代入 $k = -\frac{2}{3}$ 得 $-\frac{1}{3} = -\beta$，所以 $\beta = \frac{1}{3}$。因此

$$\frac{72(2k+1)}{(3k+1)(3k+2)} = \frac{24}{3k+1} + \frac{24}{3k+2},$$

而由第 (i) 部分（取 $m = 0$ 及 $m = 1$），該級數等於

$$24I_0 + 24I_1 = \int_0^1 \frac{24(1+x)}{(x+2)(x^2 - 2x + 4)} \,\mathrm{d}x.$$

現在把這個被積函數拆成部分分式：

$$\frac{1+x}{(x+2)(x^2 - 2x + 4)} = \frac{A}{x+2} + \frac{Bx + C}{x^2 - 2x + 4},$$

於是

$$1 + x = A(x^2 - 2x + 4) + (Bx + C)(x + 2).$$

代入 $x = -2$ 得 $-1 = 12A$，所以 $A = -\frac{1}{12}$。比較 x^2 的係數得 $0 = A + B$，所以 $B = \frac{1}{12}$。比較常數項得 $1 = 4A + 2C$，所以 $C = \frac{2}{3}$。（驗算 x 的係數：$-2A + 2B + C = \frac{1}{6} + \frac{1}{6} + \frac{2}{3} = 1$。）乘以 24，得

$$\begin{aligned}\frac{24(1+x)}{8+x^3} &= -\frac{2}{x+2} + \frac{2x+16}{x^2 - 2x + 4} \\ &= -\frac{2}{x+2} + \frac{2x-2}{x^2 - 2x + 4} + \frac{18}{(x-1)^2 + 3},\end{aligned}$$

其中我們把二次式的導數 $2x-2$ 分拆出來，並對餘下部分配方（completing the square）。

我們把每一部分在 $[0,1]$ 上積分。

$$\begin{aligned}
\int_0^1 \frac{-2}{x+2}\,\mathrm{d}x &= -2\ln\tfrac{3}{2} = -2\ln 3 + 2\ln 2,\\
\int_0^1 \frac{2x-2}{x^2-2x+4}\,\mathrm{d}x &= \Big[\ln(x^2-2x+4)\Big]_0^1 = \ln\tfrac{3}{4} = \ln 3 - 2\ln 2,\\
\int_0^1 \frac{18}{(x-1)^2+3}\,\mathrm{d}x &= \frac{18}{\sqrt{3}}\Big[\arctan\frac{x-1}{\sqrt{3}}\Big]_0^1\\
&= 6\sqrt{3}\Big(0-\arctan(-\tfrac{1}{\sqrt{3}})\Big) = 6\sqrt{3}\cdot\frac{\pi}{6} = \pi\sqrt{3}.
\end{aligned}$$

最後一行用了 $\int \frac{\mathrm{d}u}{u^2+c^2} = \frac{1}{c}\arctan\frac{u}{c}$，其中 $u = x-1$、$c=\sqrt{3}$。把三部分相加，$\ln 2$ 的項互相抵消，得

$$\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{2^{3(k+1)}}\left(\frac{72(2k+1)}{(3k+1)(3k+2)}\right) = \pi\sqrt{3}-\ln 3,$$

所以 $a=3$ 及 $b=3$。

驗算

- 這些級數收斂得非常快（每一項最多只有前一項的八分之一），所以取幾項已足以驗算。在第 (ii) 部分，級數首三項給出 $0.41667 - 0.01198 + 0.00084 \approx 0.40553$，而 $\ln\frac{3}{2}\approx 0.40547$。
- 在第 (iii) 部分，$\pi\sqrt{3}-\ln 3 \approx 5.4414 - 1.0986 = 4.3428$；用電腦把級數首 200 項相加，結果在小數點後十二位都吻合。即使只取 $k=0$ 那一項，也得 $\frac{1}{8}\cdot 36 = 4.5$，數量級正確。

常見錯誤

- 展開式寫成 8^{-k} 而不是 $8^{-(k+1)}$：一開始提出的因子 $\frac{1}{8}$ 不可遺漏。
- 把 $\frac{1}{3k+3}$ 對應到 I_3 而不是 I_2：分母是 $3k+m+1$，所以 m 比常數項小一。
- 忘記 $\arctan\big(-\frac{1}{\sqrt{3}}\big)$ 是負數，以致 $\pi\sqrt{3}$ 那一項的正負號出錯。

STEP 之外

像第 (i) 部分那樣交換求和與積分的次序，在這裏是合理的，因為該冪級數（power series）在 $[0,1]$ 上一致收斂（converges uniformly）；何時可以這樣交換，是大學一年級

分析（analysis）課程的核心主題之一。同樣的方法可以像第 (iii) 部分那樣，準確求出 $1-\frac{1}{4}+\frac{1}{7}-\frac{1}{10}+\cdots=\int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{1+x^3}$ 之和。Abbott 的 *Understanding Analysis*（《理解分析》）對一致收斂和逐項積分有細緻的講解。

Beyond STEP 詳細解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hant/。解答文字採用 CC0 1.0；題目本身版權屬 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予轉載。由機器從英文翻譯而成；尚未經審閱。