詳細解答

STEP II 2024，第 12 題

概率與統計 • 離散順序統計量

STEP II 2024，第 12 題

繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 OCR 提供下載的 2024 年 STEP 試卷（zip 檔案）內的 STEP II 試卷：

www.ocr.org.uk/Images/725753-2024-past-papers.zip

關鍵思路

在第一個遊戲中，勝出者是持有唯一最小數字的玩家，而這樣的玩家最多只有一個。因此「有勝出者」可以按照誰勝出、以哪個數字勝出，分拆成互斥（disjoint）的情況，而每一種情況都只是若干獨立（independent）概率的簡單乘積。題目給出 $\sum i^2$ 和 $\sum i^3$ 的公式，正是提示所得的和是多項式求和。第二個遊戲的做法相同，只是現在要考慮一對有序的玩家（一個最低、一個最高），並要對兩個數字求和。

解答

在整個解答中，k 個數字互相獨立，且每個都在 $\{1, 2, \ldots, n\}$ 上均勻分佈（uniform），因此任何一位玩家得到任何一個特定數字的概率都是 $\frac{1}{n}$，而得到某個含 s 個值的集合中的數字的概率是 $\frac{s}{n}$。

第 (i) 部分

固定 a，其中 $1 \leq a \leq n-1$。Ada 必須得到 a（概率為 $\frac{1}{n}$），而其餘 $k-1$ 位玩家每人都必須得到 $a+1, \ldots, n$ 這 $n-a$ 個數字之一（每人的概率為 $\frac{n-a}{n}$）。由獨立性，

$$\mathrm{P}(\text{Ada 得到}a\text{, 其他人全部較大}) = \frac{1}{n}\left(\frac{n-a}{n}\right)^{k-1} = \frac{(n-a)^{k-1}}{n^k}.$$

（當 $a = n$ 時此概率為零，這就是 a 只取到 $n-1$ 的原因。）

設 W 為有勝出者的事件。勝出者所持的數字嚴格小於其他所有人的數字，所以不可能有兩個勝出者：否則兩者都必須比對方小。因此 W 是以下事件的互斥並集：對 k 位玩家及 $a = 1, \ldots, n-1$，事件「這位玩家得到 a，而其他人都得到較大的數字」。由對稱性

（symmetry），每位玩家的貢獻都與 Ada 相同，所以

$$\mathrm{P}(W) = k\sum_{a=1}^{n-1}\frac{(n-a)^{k-1}}{n^k} = \frac{k}{n^k}\sum_{j=1}^{n-1} j^{k-1},$$

其中我們代入了 $j = n-a$，它同樣由 1 取到 $n-1$。

當 $k=4$ 時，利用題目給出的 $\sum i^3$ 公式，並以 $n-1$ 代替 n，

$$\mathrm{P}(W) = \frac{4}{n^4}\cdot\frac{1}{4}(n-1)^2n^2 = \frac{(n-1)^2}{n^2},$$

即為所求。

第 (ii) 部分

固定 d 和 a，其中 $1 \le d \le n-2$ 且 $1 \le a \le n-d-1$；這些條件保證 $a+d+1 \le n$，並且 a 與 $a+d+1$ 之間至少嚴格夾着一個數字。Ada 必須得到 a，Bob 必須得到 $a+d+1$（各自的概率為 $\frac{1}{n}$），而其餘 $k-2$ 位玩家每人都必須得到 $a+1,\ldots,a+d$ 這 d 個數字之一。由獨立性，

$$\mathrm{P}(\text{Ada 得到}a,\ \text{Bob 得到}a+d+1,\ \text{其他人嚴格介乎兩者之間}) = \frac{1}{n^2}\left(\frac{d}{n}\right)^{k-2} = \frac{d^{k-2}}{n^k}.$$

> **想一想** 為甚麼在對玩家以及對 a 和 d 求和時，每一種出現兩個勝出者的方式都恰好出現一次？

有兩個勝出者，即是一位玩家持有唯一最小的數字，而另一位玩家持有唯一最大的數字。與第 (i) 部分一樣，低位勝出者是唯一的，高位勝出者亦然，因此結果決定了一對*有序*的不同玩家（低位勝出者，高位勝出者），連同較小的數字 a 以及到較大數字的差距 $d \ge 1$：差距必須至少為 1，因為其餘 $k-2 \ge 2$ 位玩家的數字都嚴格介乎兩者之間。這些選擇不同，所得的事件就互斥。有序玩家對共有 $k(k-1)$ 對，每一對的貢獻都與（Ada，Bob）相同，所以

$$\mathrm{P}(\text{兩個勝出者}) = k(k-1)\sum_{d=1}^{n-2}\sum_{a=1}^{n-d-1}\frac{d^{k-2}}{n^k} = \frac{k(k-1)}{n^k}\sum_{d=1}^{n-2}(n-1-d)\,d^{k-2},$$

因為內層的和有 $n-d-1$ 個相等的項。

現在取 $k=4$，並記 $m = n-1$，於是 d 由 1 取到 $m-1$。利用題目給出的兩條公式，並以 $m-1$ 代替 n，

$$\begin{aligned}\sum_{d=1}^{m-1}(m-d)\,d^2 &= m\cdot\tfrac{1}{6}(m-1)m(2m-1) - \tfrac{1}{4}(m-1)^2m^2\\ &= \tfrac{1}{12}m^2(m-1)[2(2m-1)-3(m-1)]\\ &= \tfrac{1}{12}m^2(m-1)(m+1).\end{aligned}$$

因此，由於 $m-1=n-2$ 及 $m+1=n$，

$$\mathrm{P}(\text{兩個勝出者})=\frac{12}{n^4}\cdot\frac{1}{12}(n-1)^2(n-2)n=\frac{(n-2)(n-1)^2}{n^3},$$

這正是所求的結果。

當 $k=4$ 時比較一個與兩個勝出者

設 L 為有玩家持有唯一最小數字的事件，H 為有玩家持有唯一最大數字的事件。第 (i) 部分給出 $\mathrm{P}(L)=\frac{(n-1)^2}{n^2}$。把每個數字 x 換成 $n+1-x$，會把均勻分佈的數字變成均勻分佈的數字，並把「最小」與「最大」互換，所以同樣有 $\mathrm{P}(H)=\mathrm{P}(L)$。

恰好兩個勝出者就是事件 $L\cap H$，因此記 $T=\mathrm{P}(L\cap H)=\frac{(n-2)(n-1)^2}{n^3}$。恰好一個勝出者，即是 L 或 H 發生但不同時發生，所以

$$\mathrm{P}(\text{恰好一個})=\mathrm{P}(L)+\mathrm{P}(H)-2\,\mathrm{P}(L\cap H)=\frac{2(n-1)^2}{n^2}-2T.$$

兩個勝出者比一個勝出者更有可能，當且僅當

$$\begin{aligned}T>\frac{2(n-1)^2}{n^2}-2T &\iff 3\cdot\frac{(n-2)(n-1)^2}{n^3}>\frac{2(n-1)^2}{n^2}\\ &\iff 3(n-2)>2n \iff n>6,\end{aligned}$$

其中我們除以正數 $\frac{(n-1)^2}{n^3}$（因為 $n\geq 3$，所以它是正數）。當 $n=6$ 時兩個概率相等，因此最小值是

$$n=7.$$

驗算

- 當 $n=3$ 及 $k=4$ 時共有 81 個結果。以 1 勝出需要其餘三個數字都在 $\{2,3\}$ 中：共 $4\cdot 2^3=32$ 個結果。以 2 勝出需要其餘三個都是 3：共 4 個結果。所以 $\mathrm{P}(W)=\frac{36}{81}=\frac{4}{9}=\frac{(3-1)^2}{3^2}$。
- 當 $n=6$ 時，「恰好一個」和「恰好兩個」的概率都是 $\frac{25}{54}\approx 0.463$；當 $n=7$ 時，兩者分別是 $\frac{144}{343}\approx 0.420$ 和 $\frac{180}{343}\approx 0.525$。這些數值，以及兩部分中在 $n\leq 8$ 和 $k=2,3,4$ 時的公式，都已經用電腦逐一枚舉（enumeration）所有結果加以核實。
- 當 $n\to\infty$ 時，數字相同的情況變得罕見，所以有四位玩家時，幾乎總會同時有唯一最低和唯一最高的數字：的確 $\frac{(n-2)(n-1)^2}{n^3}\to 1$。

常見錯誤

- 在第 (i) 部分漏掉因子 k，或在第 (ii) 部分漏掉因子 $k(k-1)$。在第 (ii) 部分中，兩位勝出者是有序的，因為一位是低位、一位是高位。
- 把「恰好一個勝出者」算成 $\mathrm{P}(L)+\mathrm{P}(H)-\mathrm{P}(L\cap H)$，但這其實是「至少一個」；重疊部分必須減去兩次。
- 答 $n=6$：此時兩個概率相等，並非嚴格的大小關係。

STEP 之外

把一個事件按「誰」和「在哪裏」分拆成互斥的部分，是求順序統計量（order statistics）——即樣本中最小值和最大值——的分佈的離散版本。對於連續樣本，同樣的論證會給出最小值與最大值的聯合密度（joint density），而令本題變得有趣的數字相同情況亦會消失。Grimmett 和 Welsh 的 *Probability: An Introduction*（《概率導論》）是認識這些概念的好起點。

Beyond STEP 詳細解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hant/。解答文字採用 CC0 1.0；題目本身版權屬 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予轉載。由機器從英文翻譯而成；尚未經審閱。