詳細解答

STEP II 2024，第 10 題

力學 • 加速楔上的摩擦力

STEP II 2024，第 10 題

繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 OCR 提供下載的 2024 年 STEP 試卷（zip 檔案）內的 STEP II 試卷：

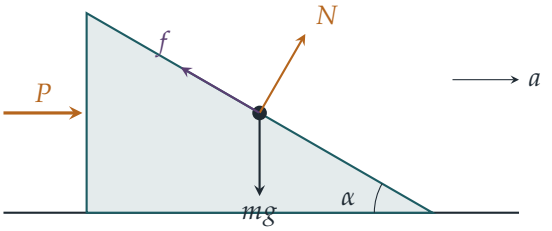
www.ocr.org.uk/Images/725753-2024-past-papers.zip

關鍵思路

整道題建基於兩個觀察。第一，水平面光滑（smooth），所以作用於整個系統（稜柱連同質點）的唯一水平外力是 P，由此可立即得出共同加速度。第二，由於質點相對稜柱不動，它的水平加速度與稜柱完全相同，因此只需對質點沿斜面及垂直斜面分解力，便可直接求得摩擦力和法向反作用力（normal reaction）。第 (iii) 部分的不等式其實就是「摩擦力 $\leq \mu\times$ 法向反作用力」，再用複角公式（compound-angle formulae）整理一下而已。

解答

我們把質點視為質點（particle），把稜柱（prism）視為在光滑水平面上滑動的剛體（rigid body），並設質點與斜面之間的接觸是粗糙（rough）的，摩擦係數（coefficient of friction）為 μ。把豎直面放在左邊，使斜面向右下傾斜；這樣 P 便把稜柱推向右方。



作用於質點的力有：重量 mg、垂直於斜面的法向反作用力 N，以及摩擦力。我們把摩擦力視為一個帶正負號的量 f，以沿斜面向上為正（若 f 結果為負，則摩擦力實際上沿斜面向下）。摩擦力的大小為 $F = |f|$。

第 (i) 部分

假設系統處於平衡（equilibrium），即所有物體都靜止。對質點沿垂直斜面及沿斜面方向分解力，得

$$N = mg\cos\alpha, \qquad f = mg\sin\alpha.$$

質點不滑動的條件是 $|f| \le \mu N$，即 $mg\sin\alpha \le \mu\, mg\cos\alpha$，亦即 $\mu \ge \tan\alpha$（由於 α 是銳角，可以除以 $mg\cos\alpha > 0$）。因此若 $\mu < \tan\alpha$，便不可能平衡：質點必定滑動。

第 (ii) 部分

加速度。把稜柱和質點合起來考慮。水平面光滑，只施加豎直方向的力；質點與稜柱之間的力屬於內力。因此唯一的水平外力是 P，而兩者的加速度同為 a（水平向右），故

$$P = (M+m)a, \qquad a = \frac{P}{M+m}.$$

對質點分解力。質點的加速度是水平的 a。它沿斜面向上的分量是 $-a\cos\alpha$（斜面向左上升，而質點向右加速），沿向外法線方向的分量是 $a\sin\alpha$。

> ? **想一想** 為甚麼要沿斜面及垂直斜面分解，而不是沿水平及豎直方向分解？

沿斜面方向，只有 f 和重量有分量；垂直斜面方向，只有 N 和重量有分量。所以每條方程只含一個未知量，免去解聯立方程。代價是加速度也要分解，但這並不困難。

沿斜面向上：

$$f - mg\sin\alpha = -ma\cos\alpha \quad\Longrightarrow\quad f = m(g\sin\alpha - a\cos\alpha).$$

代入 $a = P/(M+m)$，得

$$f = \frac{m}{M+m}[(M+m)g\sin\alpha - P\cos\alpha],$$

因此摩擦力的大小為

$$F = \frac{m}{M+m}\,|(M+m)g\sin\alpha - P\cos\alpha|,$$

與題目所求相符。這裏的絕對值確實不可少：P 較小時摩擦力沿斜面向上；但 P 較大時，斜面推向質點的力足夠大，摩擦力必須沿斜面向下，才能阻止質點沿斜面上移。

垂直斜面方向（向外法線）：

$$N - mg\cos\alpha = ma\sin\alpha \quad\Longrightarrow\quad N = \frac{m}{M+m}[(M+m)g\cos\alpha + P\sin\alpha].$$

由於 $P > 0$ 且 α 是銳角，此式為正，所以不需要絕對值，而質點亦保持與斜面接觸。

第 (iii) 部分

質點相對稜柱保持靜止，當且僅當摩擦力足以提供所需：$F \le \mu N$。設 $G = (M+m)g$，並約去正因子 $m/(M+m)$：

$$|G\sin\alpha - P\cos\alpha| \le \tan\lambda\,(G\cos\alpha + P\sin\alpha).$$

乘以 $\cos\lambda > 0$，這等價於以下一對不等式（inequalities）：

$$-\sin\lambda\,(G\cos\alpha + P\sin\alpha) \;\le\; \cos\lambda\,(G\sin\alpha - P\cos\alpha) \;\le\; \sin\lambda\,(G\cos\alpha + P\sin\alpha).$$

> ? **想一想** 這些不等式如何變成 $\alpha \pm \lambda$ 的正切？

把含 G 的項移到一邊，含 P 的項移到另一邊；這樣每個括號都是一個複角展開式。

右邊的不等式（沿斜面向上的摩擦力不可超過其極限）：

$$G(\sin\alpha\cos\lambda - \cos\alpha\sin\lambda) \le P(\cos\alpha\cos\lambda + \sin\alpha\sin\lambda),$$
$$G\sin(\alpha-\lambda) \le P\cos(\alpha-\lambda).$$

由於 $0 < \alpha - \lambda < \frac{1}{4}\pi$，有 $\cos(\alpha-\lambda) > 0$，所以此式即 $P \ge G\tan(\alpha-\lambda)$。

左邊的不等式（沿斜面向下的摩擦力不可超過其極限）：

$$P(\cos\alpha\cos\lambda - \sin\alpha\sin\lambda) \le G(\sin\alpha\cos\lambda + \cos\alpha\sin\lambda),$$
$$P\cos(\alpha+\lambda) \le G\sin(\alpha+\lambda).$$

這裏要用到條件 $\lambda < \alpha < \frac{1}{4}\pi$：它給出 $0 < \alpha+\lambda < \frac{1}{2}\pi$，所以 $\cos(\alpha+\lambda) > 0$，可以相除得 $P \le G\tan(\alpha+\lambda)$。

兩式必須同時成立，故

$$(M+m)g\tan(\alpha-\lambda) \le P \le (M+m)g\tan(\alpha+\lambda),$$

與題目所求相符。

驗算

- 當 $P = 0$ 時，下界給出 $0 \ge G\tan(\alpha-\lambda)$，由於 $\lambda < \alpha$，此式不成立：這與第 (i) 部分一致，因為 $\mu = \tan\lambda < \tan\alpha$。
- 當 $P = G\tan\alpha$ 時得 $f = 0$：此時的推力恰好令光滑質點能靜止不動，這正是熟悉的「加速楔子」結果 $a = g\tan\alpha$。這個值理應落在區間之內，事實亦然。

- 數值上，取 $M = 3$、$m = 1$、$g = 9.8$、$\alpha = 30°$、$\lambda = 10°$，容許範圍是 $14.27 \le P \le 32.89$（牛頓）。當 $P = 20$ 時，公式給出 $F \approx 0.570$ 及 $N \approx 10.99$，所以 $F/N \approx 0.052 < \tan 10° \approx 0.176$。用電腦對數以千計的隨機情況直接解質點的方程，結果與兩條公式及該區間都吻合。

常見錯誤

- 在第 (ii) 部分取 $N = mg\cos\alpha$：斜面正在加速，所以法向反作用力並非靜止時的數值。
- 漏掉絕對值，結果只求得 P 的下界；上界來自摩擦力沿斜面向下的情況。
- 除以 $\cos(\alpha + \lambda)$ 時沒有指出它是正數；這正是用到 $\alpha < \frac{1}{4}\pi$ 的地方。

STEP 之外

更簡潔的看法是在稜柱的參考系中處理問題，該參考系以 a 加速：在其中，質點會受到一個向後的額外「虛擬力」(fictitious force) ma，問題就變成在粗糙斜面上的普通靜力學，只是等效重力傾側了 $\arctan(a/g)$ 這個角度。此時條件就是：這個傾側角與 α 的差必須在摩擦角（angle of friction）λ 之內，這正好就是所求得的區間。非慣性參考系（non-inertial frames）與虛擬力在 Kleppner 和 Kolenkow 的 *An Introduction to Mechanics*（《力學導論》）中有詳細闡述。

Beyond STEP 詳細解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hant/。解答文字採用 CC0 1.0；題目本身版權屬 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予轉載。由機器從英文翻譯而成；尚未經審閱。