詳細解答

STEP II 2024，第 1 題

純數學 • 連續整數之和

> **STEP II 2024，第 1 題**
>
> 繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 OCR 提供下載的 2024 年 STEP 試卷（zip 檔案）內的 STEP II 試卷：
>
> www.ocr.org.uk/Images/725753-2024-past-papers.zip

關鍵思路

等式兩邊都是算術級數（arithmetic series），所以各自等於（項數）×（平均項）。令兩者相等，便得到 n、k 與 c 之間的一條二次關係式，而題目餘下部分就是針對這條關係式的數論（number theory）問題。固定 k 後，很容易解出 c，再由奇偶性（parity）或餘數判斷 c 何時是正整數。若改為固定 $c=1$，便得到一條佩爾（Pell）型方程，而 (iv)(b) 中的映射正是由舊解產生新解的標準方法。

解答

第 (i) 部分

由 c 開始往上的 $n+k$ 個整數是 $c, c+1, \ldots, c+n+k-1$。它們的和是

$$S_1 = (n+k)c + \frac{(n+k)(n+k-1)}{2}.$$

接下來的 n 個整數是 $c+n+k, \ldots, c+2n+k-1$，其和為

$$S_2 = n(c+n+k) + \frac{n(n-1)}{2}.$$

把兩個和都乘以二並展開，

$$2S_1 = 2nc + 2kc + n^2 + 2nk + k^2 - n - k,$$
$$2S_2 = 2nc + 2n^2 + 2nk + n^2 - n.$$

相減得 $2S_1 - 2S_2 = 2kc + k^2 - k - 2n^2$。因此

$$S_1 = S_2 \iff 2kc + k^2 - k = 2n^2 \iff 2n^2 + k = 2ck + k^2.$$

每一步都是可逆的（我們只是展開、乘以二和移項），所以兩個和相等當且僅當 $2n^2+k = 2ck+k^2$，得證。

第 (ii) 部分

(a) 當 $k=1$ 時，條件為 $2n^2+1=2c+1$，所以 $c=n^2$。對每個 n 這都是正整數，因此每一個正整數 n 都可以，且 $c=n^2$。（例如 $n=2$：$4+5+6=7+8$。）

(b) 當 $k=2$ 時，條件為 $2n^2+2=4c+4$，即

$$n^2 = 2c+1, \qquad c=\frac{n^2-1}{2}.$$

要 c 是整數，n^2 必須是奇數，所以 n 必須是奇數。要 c 是正數，需要 $n^2>1$，這就排除了 $n=1$。反過來，每個奇數 $n\geq 3$ 都給出正整數 c。所以可能的值是

$$n\in\{3,5,7,\dots\}, \qquad c=\tfrac{1}{2}(n^2-1).$$

$n=3$、$c=4$ 的情況就是等式 $4+5+6+7+8=9+10+11$。

第 (iii) 部分

當 $k=4$ 時，條件為 $2n^2+4=8c+16$，即

$$n^2 = 4c+6 = 4(c+1)+2.$$

所以 n^2 除以 4 的餘數將會是 2。但平方數除以 4 的餘數只能是 0 或 1：若 $n=2m$，則 $n^2=4m^2$；若 $n=2m+1$，則 $n^2=4(m^2+m)+1$。所以沒有解。

第 (iv) 部分

當 $c=1$ 時，條件變成 $2n^2+k=2k+k^2$，即

$$2n^2 = k(k+1). \qquad (*)$$

換句話說 $n^2=\frac{1}{2}k(k+1)$：我們要找同時是完全平方數（perfect square）的三角形數（triangular number）。

(a) 嘗試較小的 k：$k=1$ 給出 $2n^2=2$，所以 $n=1$；接着 $k=2,\dots,7$ 給出 $k(k+1)/2 = 3,6,10,15,21,28$，都不是平方數；而 $k=8$ 給出 $2n^2=72$，所以 $n=6$。因此兩個可能情況是

$$k=1,\ n=1 \qquad \text{和} \qquad k=8,\ n=6.$$

（驗證第二個：$1+2+\cdots+14=105$ 及 $15+16+\cdots+20=105$。）

(b) 設 $2N^2 = K^2 + K$。令 $N' = 3N + 2K + 1$ 及 $K' = 4N + 3K + 1$。則

$$\begin{aligned} 2N'^2 &= 2(9N^2 + 4K^2 + 1 + 12NK + 6N + 4K) \\ &= 18N^2 + 8K^2 + 24NK + 12N + 8K + 2, \\ K'^2 + K' &= (16N^2 + 9K^2 + 1 + 24NK + 8N + 6K) + (4N + 3K + 1) \\ &= 16N^2 + 9K^2 + 24NK + 12N + 9K + 2. \end{aligned}$$

相減，

$$2N'^2 - (K'^2 + K') = 2N^2 - K^2 - K = 0,$$

這裏用了假設。所以 $2N'^2 = K'(K' + 1)$。由於 N 和 K 是正整數，N' 和 K' 也是正整數；由 $(*)$ 及第 (i) 部分，N' 是 n 的一個可能值，對應的 $k = K'$。

想一想 這些古怪的公式從何而來？

把 $(*)$ 乘以 4 再加 1：它變成 $(2k+1)^2 - 8n^2 = 1$。令 $x = 2k + 1$ 及 $y = n$，這就是佩爾方程 $x^2 - 8y^2 = 1$，其所有解可以由 $x + y\sqrt{8}$ 乘以最小解 $3 + \sqrt{8}$ 逐一產生。寫出 $(x + y\sqrt{8})(3 + \sqrt{8}) = (3x + 8y) + (x + 3y)\sqrt{8}$，再轉回 k 和 n，便恰好得到 $N' = 3N + 2K + 1$ 及 $2K' + 1 = 3(2K + 1) + 8N$，即 $K' = 4N + 3K + 1$。

(c) 把映射應用於 $(N, K) = (1, 1)$，只會得到 $N' = 6$、$K' = 8$，即 (a) 中的第二個解。把它應用於 $(N, K) = (6, 8)$：

$$N' = 18 + 16 + 1 = 35, \qquad K' = 24 + 24 + 1 = 49,$$

再把它應用於 $(35, 49)$：

$$N' = 105 + 98 + 1 = 204, \qquad K' = 140 + 147 + 1 = 288.$$

所以另外兩個解是

$$k = 49,\ n = 35 \qquad \text{和} \qquad k = 288,\ n = 204.$$

確實 $2 \cdot 35^2 = 2450 = 49 \cdot 50$ 及 $2 \cdot 204^2 = 83232 = 288 \cdot 289$。

驗算

- 開首的例子是 $n = 3$、$k = 2$、$c = 4$：$2 \cdot 9 + 2 = 20 = 2 \cdot 4 \cdot 2 + 4$，所以它滿足 (i) 的關係式，並符合 (ii)(b)，其中 $c = \frac{1}{2}(9 - 1)$。
- 用電腦搜尋所有 $n, k < 40$ 及 $c < 200$，證實兩個和相等恰好當 $2n^2 + k = 2ck + k^2$；另以 $c = 1$ 及 $n, k < 400$ 搜尋，只找到 $(k, n) = (1, 1), (8, 6), (49, 35), (288, 204)$，與 (iv) 吻合。

- 在 (iv)(b) 中，注意由 (N, K) 到 (N', K') 的一步對任何 N、K 都保持 $2N^2 - K^2 - K$ 這個量不變，這是用小數字快速檢查代數運算的方法，例如 $N = K = 0$：此時 $N' = K' = 1$，兩個值都是 0。

常見錯誤

- 在 (ii)(b) 中把 $n = 1$ 也包括在內：它給出 $c = 0$，並不是正整數。
- 在 (i) 中數錯第二組由哪裏開始：它由 $c + n + k$ 開始，而不是 $c + n + k + 1$。
- 在 (iv)(c) 中再次給出 $k = 8$、$n = 6$：這是映射的第一個輸出，但在 (a) 已經找到。

STEP 之外

方程 $x^2 - 8y^2 = 1$ 是一條佩爾方程；對任何非平方數 d，$x^2 - dy^2 = 1$ 的所有解都來自單一基本解（fundamental solution）的冪，透過 $x + y\sqrt{d}$ 這類數的乘法得出。這是初次窺見 $\mathbb{Z}[\sqrt{d}]$ 這類環（ring）中的單位（unit），而這是代數數論（algebraic number theory）的核心課題。Davenport 的 *The Higher Arithmetic*（《高等算術》）透過連分數（continued fraction）處理佩爾方程。

Beyond STEP 詳細解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hant/。解答文字採用 CC0 1.0；題目本身版權屬 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予轉載。由機器從英文翻譯而成；尚未經審閱。