詳細解答

STEP III 2023，第 9 題

力學 • 以繩連接的兩質點運動

STEP III 2023，第 9 題

繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 OCR 提供下載的 2023 年 STEP 試卷（zip 檔案）內的 STEP III 試卷：

www.ocr.org.uk/Images/707102-2023-past-papers.zip

關鍵思路

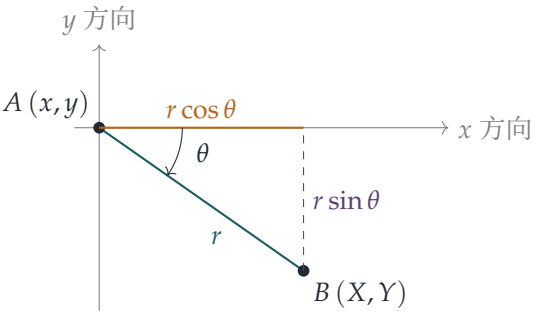
用 A 的位置和繩子的方向 θ 來描述整個系統。張力（tension）只沿繩子方向作用，所以每個質點的加速度在垂直於繩子的方向上都沒有分量。比較兩個質點的垂直加速度，便可推出 $\ddot{\theta} = 0$：繩子以恆定的速率轉動。之後再用動量守恆（conservation of momentum）就能完成解題。

解答

全題中，兩個質點在光滑水平面上運動，繩子輕而不可伸長（inextensible），而且（按題意可假設）繩子一直保持拉緊，所以任何時刻都有 $AB = r$。

第 (i) 部分

向量 $\overrightarrow{AB}$ 的長度是 r。由於 θ 是從正 x 軸順時針量度的，當 $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$ 時，這個向量指向 x 方向的下方，如圖所示。



從 A 走到 B，我們在 x 方向移動 $r\cos\theta$，在 y 的負方向移動 $r\sin\theta$，所以

$$X = x + r\cos\theta, \qquad Y = y - r\sin\theta.$$

這兩條式子對所有 θ 都成立，因為 $(\cos\theta, -\sin\theta)$ 正是從 x 軸順時針轉 θ 角的單位向量（unit vector）。

第 (ii) 部分

對 t 求導（r 是常數，θ 是 t 的函數）：

$$\dot{X} = \dot{x} - r\dot{\theta}\sin\theta, \qquad \dot{Y} = \dot{y} - r\dot{\theta}\cos\theta,$$
$$\ddot{X} = \ddot{x} - r\ddot{\theta}\sin\theta - r\dot{\theta}^2\cos\theta, \qquad \ddot{Y} = \ddot{y} - r\ddot{\theta}\cos\theta + r\dot{\theta}^2\sin\theta.$$

第 (iii) 部分

張力 T 沿單位向量 $(\cos\theta, -\sin\theta)$ 把 A 拉向 B，又沿 $(-\cos\theta, \sin\theta)$ 把 B 拉向 A。根據牛頓第二定律（Newton's second law），

$$m\ddot{x} = T\cos\theta, \quad m\ddot{y} = -T\sin\theta, \qquad M\ddot{X} = -T\cos\theta, \quad M\ddot{Y} = T\sin\theta.$$

因此

$$m(\ddot{x}\sin\theta + \ddot{y}\cos\theta) = T\cos\theta\sin\theta - T\sin\theta\cos\theta = 0,$$

用完全相同的方法可得 $M(\ddot{X}\sin\theta + \ddot{Y}\cos\theta) = 0$。分別除以 m 和 M，便得到所要求的兩個結果。（從幾何角度看：$(\sin\theta, \cos\theta)$ 垂直於繩子，而兩個質點在這個方向上都沒有加速度。）

> **想一想** 我們有兩條方程，都是說「沒有垂直方向的加速度」。它們怎樣告訴我們關於 θ 的資訊？

把第二條減去第一條，再把第 (ii) 部分中 $\ddot{X} - \ddot{x}$ 和 $\ddot{Y} - \ddot{y}$ 的表達式代入：

$$\begin{aligned} 0 &= (\ddot{X} - \ddot{x})\sin\theta + (\ddot{Y} - \ddot{y})\cos\theta \\ &= (-r\ddot{\theta}\sin\theta - r\dot{\theta}^2\cos\theta)\sin\theta + (-r\ddot{\theta}\cos\theta + r\dot{\theta}^2\sin\theta)\cos\theta \\ &= -r\ddot{\theta}\,(\sin^2\theta + \cos^2\theta) = -r\ddot{\theta}. \end{aligned}$$

由於 $r \neq 0$，所以 $\ddot{\theta} = 0$，即 $\dot{\theta}$ 是常數。

要求出這個常數，可用初始條件。在 $t = 0$ 時，B 相對於 A 位於 $(r, 0)$，所以 $\theta(0) = 0$。此外 $\dot{y}(0) = u$ 而 $\dot{Y}(0) = 0$，於是第 (ii) 部分中 $\dot{Y}$ 的表達式給出

$$0 = u - r\dot{\theta}(0)\cos 0 \quad \Longrightarrow \quad \dot{\theta}(0) = \frac{u}{r}.$$

（$\dot{X}$ 的方程與此一致：$0 = 0 - r\dot{\theta}(0)\sin 0$。）所以對所有 t 都有 $\dot{\theta} = u/r$；利用 $\theta(0) = 0$ 積分，得

$$\theta = \frac{ut}{r},$$

此即所求。

第 (iv) 部分

把第 (iii) 部分的運動方程兩兩相加，

$$m\ddot{x} + M\ddot{X} = T\cos\theta - T\cos\theta = 0, \qquad m\ddot{y} + M\ddot{Y} = -T\sin\theta + T\sin\theta = 0.$$

這就是動量守恆：張力是系統的內力。把第二條方程積分一次，可知 $m\dot{y} + M\dot{Y}$ 是常數，等於其初始值 $mu + M\cdot 0 = mu$。再積分一次，並利用 $y(0) = Y(0) = 0$，得

$$my + MY = mut.$$

第 (v) 部分

代入第 (i) 部分的 $Y = y - r\sin\theta$ 和第 (iii) 部分的 $\theta = ut/r$：

$$my + M\left(y - r\sin\frac{ut}{r}\right) = mut \quad\Longrightarrow\quad y = \frac{1}{m+M}\left(mut + Mr\sin\frac{ut}{r}\right),$$

此即所求結果。

第 (vi) 部分

把第 (v) 部分的結果求導，

$$\dot{y} = \frac{1}{m+M}\left(mu + Mu\cos\frac{ut}{r}\right) = \frac{u}{m+M}\left(m + M\cos\frac{ut}{r}\right).$$

在時刻 $t = \pi r/u$，即繩子轉了半圈時，$\cos(ut/r) = -1$，而

$$\dot{y} = \frac{u(m-M)}{m+M},$$

當 $M > m$ 時這是負數（因為 $u > 0$）。所以在那一刻，A 的速度的 y 分量是負的；由連續性（continuity）可知，在該時刻附近的一段時間區間內亦然。

驗算

- 在 $t = 0$ 時，由第 (v) 部分的公式得 $\dot{y} = u(m+M)/(m+M) = u$，與 A 的初速度相符。

- 在 x 方向用同樣方法可得 $mx + MX = Mr$，所以 $x = \dfrac{Mr}{m+M}(1-\cos\theta)$。結合第 (v) 部分，質心（centre of mass）在 y 方向以速率 $mu/(m+M)$ 作直線運動，而兩個質點以角速度（angular speed）u/r 繞質心轉動，這正是我們熟悉的圖像。於是張力是常數 $\dfrac{mM}{m+M}\dfrac{u^2}{r} > 0$，所以繩子確實一直保持拉緊。
- 若 $M \to \infty$，B 保持不動，第 (v) 部分給出 $y = r\sin(ut/r)$：A 繞 B 作半徑為 r 的圓周運動，理應如此。
- 取 $m = 1$、$M = 3$、$u = r = 1$，用電腦模擬兩個以極硬彈簧相連的質點，在 $t = \pi$ 時得到 $y \approx 0.7854$ 和 $\dot{y} \approx -0.5000$，與 $\frac{\pi}{4}$ 及 $\frac{1-3}{1+3} = -\frac{1}{2}$ 吻合。

常見錯誤

- 因順時針的約定而弄錯正負號：$Y = y - r\sin\theta$，所以 $\dot{Y}$ 中的項是 $-r\dot{\theta}\cos\theta$，而不是 $+$。
- 忘記交代常數 u/r 的來由：它來自 $\dot{Y}(0) = 0$，而不單單來自 A 的速率。
- 在第 (vi) 部分中只聲稱 $\dot{y} < 0$「最終」會成立，卻沒有給出具體時刻；$t = \pi r/u$ 便是一個確定的時刻。

STEP 之外

這是二體問題（two-body problem）最簡單的形式：運動分解為質心的勻速運動，加上相對於質心的運動，而後者由約化質量（reduced mass）$mM/(m+M)$ 支配。同樣的分解方法是行星軌道和雙原子分子（diatomic molecule）振動的基礎。Kleppner 與 Kolenkow 的 *An Introduction to Mechanics*（《力學導論》）仔細地發展了質心坐標和約化質量的理論。

Beyond STEP 詳細解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hant/。解答文字採用 CC0 1.0；題目本身版權屬 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予轉載。由機器從英文翻譯而成；尚未經審閱。