詳細解答

STEP III 2023，第 8 題

純數學 • 分段微分方程

STEP III 2023，第 8 題

繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 OCR 提供下載的 2023 年 STEP 試卷（zip 檔案）內的 STEP III 試卷：

www.ocr.org.uk/Images/707102-2023-past-papers.zip

關鍵思路

絕對值（modulus）令這條方程變成非線性（non-linear），但只是輕微的非線性：在任何一段 y' 保持同一正負號的區間上，$|y'|$ 不過就是 y' 或 $-y'$，方程於是變成一條普通的常係數（constant-coefficient）方程。因此我們沿著解一直走，直到 y' 變為零，然後轉用另一條線性方程，並在接合點令 y 和 y' 相配。第 (iv) 部分是省力的竅門：把解反射（reflection），即 $x \mapsto c - x$，會令一階導數項變號，而這正好就是兩條線性方程之間的切換。

解答

第 (i) 部分

設 $\mathrm{f}(x) = x\mathrm{e}^{-x}$，則

$$\mathrm{f}'(x) = (1-x)\mathrm{e}^{-x}, \qquad \mathrm{f}''(x) = -\mathrm{e}^{-x} - (1-x)\mathrm{e}^{-x} = (x-2)\mathrm{e}^{-x}.$$

因此對每個實數 x，

$$\mathrm{f}'' + 2\mathrm{f}' + \mathrm{f} = [(x-2) + 2(1-x) + x]\mathrm{e}^{-x} = 0$$

都成立。此外 $\mathrm{f}(0) = 0$ 及 $\mathrm{f}'(0) = 1 \cdot \mathrm{e}^{0} = 1$，符合要求。

由於 $\mathrm{e}^{-x} > 0$，$\mathrm{f}'(x)$ 的正負號與 $1 - x$ 的正負號相同，而當 $x \leq 1$ 時，$1 - x$ 為 ≥ 0。所以當 $x \leq 1$ 時，$\mathrm{f}'(x) \geq 0$。

第 (ii) 部分

在 $x \le 1$ 上，我們有 $\mathrm{f}' \ge 0$，所以 $|\mathrm{f}'| = \mathrm{f}'$，而 (ii) 的方程與 (i) 的方程相同。於是 f 在 $x \le 1$ 上滿足新方程及其初始條件，故

$$\mathrm{g}_1(x) = x\mathrm{e}^{-x}.$$

在接合點，$\mathrm{g}_1(1) = \mathrm{e}^{-1}$ 及 $\mathrm{g}_1'(1) = 0$。連續可微（continuously differentiable）意味著 g_2 必須以相同的值開始：$\mathrm{g}_2(1) = \mathrm{e}^{-1}$，$\mathrm{g}_2'(1) = 0$。

想一想 緊接 $x = 1$ 之後，y' 取甚麼正負號？

在 $x = 1$ 處，方程給出 $y'' = -2|y'| - y = -\mathrm{e}^{-1} < 0$，所以 y' 在經過 0 時遞減，並在稍為越過 $x = 1$ 之處為負。在那裏 $|y'| = -y'$，方程變成

$$\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2} - 2\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} + y = 0.$$

輔助方程（auxiliary equation）$m^2 - 2m + 1 = 0$ 有重根（repeated root）$m = 1$，所以 $\mathrm{g}_2(x) = (A + Bx)\mathrm{e}^x$ 及 $\mathrm{g}_2'(x) = (A + B + Bx)\mathrm{e}^x$。在 $x = 1$ 處的條件給出

$$(A + B)\mathrm{e} = \mathrm{e}^{-1}, \qquad (A + 2B)\mathrm{e} = 0,$$

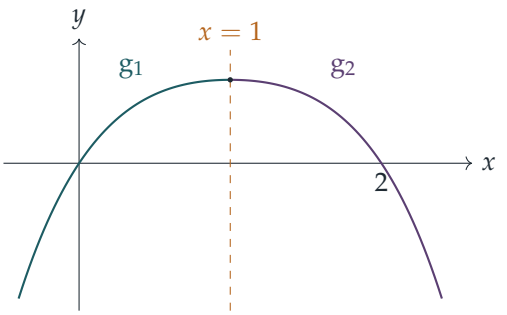
所以 $B = -\mathrm{e}^{-2}$ 及 $A = 2\mathrm{e}^{-2}$。因此

$$\mathrm{g}_2(x) = (2 - x)\mathrm{e}^{x-2}.$$

我們必須驗證這與假設 $y' \le 0$ 一致：對所有 $x \ge 1$，$\mathrm{g}_2'(x) = (1 - x)\mathrm{e}^{x-2} \le 0$。所以在整個 $x \ge 1$ 上都有 $|\mathrm{g}_2'| = -\mathrm{g}_2'$，而 g_2 確實在整個 $x \ge 1$ 上滿足這條含絕對值的方程。

第 (iii) 部分

在 g_1 中以 $2 - x$ 代替 x，得到 $(2 - x)\mathrm{e}^{-(2-x)} = (2 - x)\mathrm{e}^{x-2} = \mathrm{g}_2(x)$。所以 $\mathrm{g}_2(x) = \mathrm{g}_1(2 - x)$：曲線 $y = \mathrm{g}_2(x)$ 是 $y = \mathrm{g}_1(x)$ 關於直線 $x = 1$ 的反射。



第 (iv) 部分

設 $Y(x) = \mathrm{k}(c-x)$，並記 $u = c - x$。由鏈式法則（chain rule），配合 $\mathrm{d}u/\mathrm{d}x = -1$，

$$Y'(x) = -\mathrm{k}'(u), \qquad Y''(x) = \mathrm{k}''(u).$$

因此

$$Y'' - pY' + qY = \mathrm{k}''(u) + p\,\mathrm{k}'(u) + q\,\mathrm{k}(u),$$

而只要 $r \le u \le s$，右邊便等於零，因為 k 在那裏是原方程的解。而 $r \le c - x \le s$ 等價於

$$c - s \le x \le c - r,$$

所以 $y = \mathrm{k}(c-x)$ 在區間 $[c-s, c-r]$ 上滿足 $y'' - py' + qy = 0$。

這解釋了 (iii)：取 $p = 2$、$q = 1$、在 $(-\infty, 1]$ 上 $\mathrm{k} = \mathrm{g}_1$ 及 $c = 2$，反射後的函數 $\mathrm{g}_1(2-x)$ 在 $[1, \infty)$ 上是 $y'' - 2y' + y = 0$ 的解。

第 (v) 部分

設 $\mathrm{h}(x) = \mathrm{e}^{-x}\sin x$，則

$$\mathrm{h}'(x) = \mathrm{e}^{-x}(\cos x - \sin x) = \sqrt{2}\,\mathrm{e}^{-x}\cos\left(x + \tfrac{1}{4}\pi\right),$$

所以 $\mathrm{h}'(\frac{1}{4}\pi) = \sqrt{2}\,\mathrm{e}^{-\pi/4}\cos\frac{1}{2}\pi = 0$。（第二種形式亦顯示，如題目所給，在 $[-\frac{3}{4}\pi, \frac{1}{4}\pi]$ 上 $\mathrm{h}' \ge 0$，以及 $\mathrm{h}'(-\frac{3}{4}\pi) = 0$，這一點稍後會用到。）

計劃與第 (ii) 部分如出一轍。在 $y' \le 0$ 的區間上，方程是 $y'' - 2y' + 2y = 0$；在 $y' \ge 0$ 之處，方程是 $y'' + 2y' + 2y = 0$，而 h 滿足這條方程。

(a) 在 $x = \frac{1}{4}\pi$ 處，我們有 $y = \mathrm{h}(\frac{1}{4}\pi) = \frac{1}{\sqrt{2}}\mathrm{e}^{-\pi/4} > 0$ 及 $y' = 0$，所以 $y'' = -2y < 0$，而 y' 轉為負。因此我們需要 $y'' - 2y' + 2y = 0$ 的一個解，而取 $p = q = 2$ 的第 (iv) 部分正好提供了一個：$y = \mathrm{h}(c-x)$ 在 $c - \frac{1}{4}\pi \le x \le c + \frac{3}{4}\pi$ 上成立。選取 $c = \frac{1}{2}\pi$，這個區間就恰好是 $[\frac{1}{4}\pi, \frac{5}{4}\pi]$，並且

$$y = \mathrm{h}\left(\tfrac{1}{2}\pi - x\right) = \mathrm{e}^{x-\pi/2}\sin\left(\tfrac{1}{2}\pi - x\right) = \mathrm{e}^{x-\pi/2}\cos x.$$

> ? **想一想** 我們怎樣知道這是那個正確的解，而不只是某一個解？

它在接合點相配：$\mathrm{h}(\frac{1}{2}\pi - \frac{1}{4}\pi) = \mathrm{h}(\frac{1}{4}\pi)$，而它的導數 $-\mathrm{h}'(\frac{1}{2}\pi - x)$ 在 $x = \frac{1}{4}\pi$ 處等於 $-\mathrm{h}'(\frac{1}{4}\pi) = 0$。所以 y 和 y' 在那裏連續。它亦是自洽的：對 $x \in [\frac{1}{4}\pi, \frac{5}{4}\pi]$，我們有 $\frac{1}{2}\pi - x \in [-\frac{3}{4}\pi, \frac{1}{4}\pi]$，而在那裏 $\mathrm{h}' \ge 0$，所以 $y' = -\mathrm{h}'(\frac{1}{2}\pi - x) \le 0$，並且處處 $|y'| = -y'$。由於一條線性方程在某點給定 y 和 y' 後只有一個解，這就是解的延續。所以在 $\frac{1}{4}\pi \le x \le \frac{5}{4}\pi$ 上，

$$y = \mathrm{e}^{x-\pi/2}\cos x.$$

(b) 在 $x = \frac{5}{4}\pi$ 處：$y = \mathrm{e}^{3\pi/4}\cos\frac{5}{4}\pi = -\frac{1}{\sqrt{2}}\mathrm{e}^{3\pi/4} < 0$，以及 $y' = -\mathrm{h}'(-\frac{3}{4}\pi) = 0$。此時 $y'' = -2y > 0$，所以 y' 轉為正，方程變回 $y'' + 2y' + 2y = 0$。

這條方程是常係數的，所以把解平移後仍然是解。由於 $\sin(x - 2\pi) = \sin x$，函數 $\mathrm{h}(x - 2\pi) = \mathrm{e}^{2\pi - x}\sin x$ 是它的解；而在 $[\frac{5}{4}\pi, \frac{9}{4}\pi]$ 上，它的自變量 $x - 2\pi$ 取遍 $[-\frac{3}{4}\pi, \frac{1}{4}\pi]$，在那裏 $\mathrm{h}' \geq 0$，所以它與 $y' \geq 0$ 一致。驗證在 $x = \frac{5}{4}\pi$ 處的接合：

$$\mathrm{e}^{2\pi - 5\pi/4}\sin\tfrac{5}{4}\pi = -\tfrac{1}{\sqrt{2}}\mathrm{e}^{3\pi/4}, \qquad \mathrm{h}'(\tfrac{5}{4}\pi - 2\pi) = \mathrm{h}'(-\tfrac{3}{4}\pi) = 0,$$

兩者都相配。所以在 $\frac{5}{4}\pi \leq x \leq \frac{9}{4}\pi$ 上，

$$y = \mathrm{e}^{2\pi - x}\sin x.$$

在 $x = \frac{9}{4}\pi$ 處，這等於 $\mathrm{e}^{-\pi/4}\sin\frac{1}{4}\pi = \mathrm{h}(\frac{1}{4}\pi)$，且導數為零：解回到了它在 $\frac{1}{4}\pi$ 處的狀態，所以對 $x \geq \frac{1}{4}\pi$，解是週期（periodic）為 2π 的週期函數。

驗算

- 各段按構造是光滑地接合的，但直接看一看也是值得的：在 $x = \frac{5}{4}\pi$ 處，(a) 和 (b) 都給出 $y = -\frac{1}{\sqrt{2}}\mathrm{e}^{3\pi/4} \approx -7.4605$，斜率為零。
- 從 $y(0) = 0$、$y'(0) = 1$ 開始，以數值方法逐步推進這些含絕對值的方程，可在 $[0, 4]$ 上重現 $\mathrm{g}_1, \mathrm{g}_2$，並在 $[0, \frac{9}{4}\pi]$ 上重現 (v) 的三段，誤差在 10^{-9} 以內。
- 直接對 (a) 求導：$y' = \mathrm{e}^{x - \pi/2}(\cos x - \sin x)$，$y'' = -2\mathrm{e}^{x-\pi/2}\sin x$，而 $y'' - 2y' + 2y = 0$，符合要求。

常見錯誤

- 過了轉向點（turning point）後仍然保留 $|y'| = y'$：在 $x = 1$ 之後，f 本身並不是解。
- 忘記驗證新的一段在整個區間上都令 y' 保持所假設的正負號。
- 在 (iv) 中把區間寫成 $[r, s]$；反射會把它映射到 $[c - s, c - r]$。

STEP 之外

像這樣的方程，其右邊除了在一個切換曲面（這裏是 $y' = 0$）兩側之外都是光滑的，稱為分段光滑系統（piecewise-smooth systems）或切換系統（switching systems）；解是由線性的片段黏合而成的，而由於 $|y'|$ 是利普希茨（Lipschitz）連續的，存在性與唯一性（existence and uniqueness）仍然可由皮卡－林德洛夫定理（Picard–Lindelöf theorem）得出。(v) 中的 2π 週期性是線性阻尼方程永遠不可能產生的：取 $E = \frac{1}{2}y'^2 + y^2$，我們

得到 $\mathrm{d}E/\mathrm{d}x = -2y'|y'|$，所以這個「阻尼」項在 y 上升時移走能量，在 y 下降時又把能量歸還。Boyce 和 DiPrima 的 *Elementary Differential Equations*（《初等微分方程》）涵蓋線性理論及唯一性。

Beyond STEP 詳細解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hant/。解答文字採用 CC0 1.0；題目本身版權屬 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予轉載。由機器從英文翻譯而成；尚未經審閱。