詳細解答

STEP III 2023，第 7 題

純數學 • 積分不等式

STEP III 2023，第 7 題

繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 OCR 提供下載的 2023 年 STEP 試卷（zip 檔案）內的 STEP III 試卷：

www.ocr.org.uk/Images/707102-2023-past-papers.zip

關鍵思路

連續函數（continuous function）的平方的積分永不為負，而且只有當該函數恆等於零（identically zero）時，積分才等於零。每一部分都給我們一條涉及 $\int(\text{某式})^2$ 的等式，稍作整理後，就會變成「一個完全平方的積分等於零」。第 (i) 部分為第 (ii) 部分提供工具，第 (iii) 部分由分部積分（integration by parts）擔當同樣角色，而在第 (iv) 部分，我們要自己透過配方（completing the square）把平方找出來。

解答

第 (i) 部分

在左邊的積分中代入 $x = u^2$，於是 $\mathrm{d}x = 2u\,\mathrm{d}u$。當 x 由 0 變到 1 時，$u \geq 0$ 同樣由 0 變到 1，而且 $\sqrt{x} = u$。因此

$$\int_0^1 \mathrm{f}(\sqrt{x})\,\mathrm{d}x = \int_0^1 \mathrm{f}(u)\,2u\,\mathrm{d}u = 2\int_0^1 x\,\mathrm{f}(x)\,\mathrm{d}x,$$

最後一步只是把啞變量（dummy variable）改名。這正是所求的結果。

第 (ii) 部分

在第 (i) 部分中取 $\mathrm{f} = \mathrm{g}$，已知條件就變成

$$\int_0^1 (\mathrm{g}(x))^2\,\mathrm{d}x = 2\int_0^1 x\,\mathrm{g}(x)\,\mathrm{d}x - \frac{1}{3}.$$

現在展開目標積分，並利用 $\int_0^1 x^2\,\mathrm{d}x = \frac{1}{3}$：

$$\begin{aligned}\int_0^1 (\mathrm{g}(x)-x)^2\,\mathrm{d}x &= \int_0^1 (\mathrm{g}(x))^2\,\mathrm{d}x - 2\int_0^1 x\,\mathrm{g}(x)\,\mathrm{d}x + \int_0^1 x^2\,\mathrm{d}x \\ &= -\frac{1}{3} + \frac{1}{3} = 0,\end{aligned}$$

得證。

> **想一想** 為甚麼積分為零就能迫使 $\mathrm{g}(x) = x$ 處處成立，而不只是「大致上」成立？

設 $\phi(x) = (\mathrm{g}(x)-x)^2$。它是連續的（因為 g 連續），而且 $\phi(x) \geq 0$。假設對某個 $c \in [0,1]$ 有 $\phi(c) > 0$。由連續性，存在一個包含 c、長度為某正數 δ 的區間 $I \subseteq [0,1]$，在其上 $\phi(x) > \frac{1}{2}\phi(c)$。由於在其他地方 $\phi \geq 0$，

$$\int_0^1 \phi(x)\,\mathrm{d}x \;\geq\; \int_I \phi(x)\,\mathrm{d}x \;\geq\; \tfrac{1}{2}\phi(c)\,\delta > 0,$$

這是矛盾。所以對 $0 \leq x \leq 1$ 中的每一個 x，都有 $\phi(x) = 0$，即 $\mathrm{g}(x) = x$。（連續性確實重要：一個只在單一點與 x 不同的函數，積分仍然會是零。）

第 (iii) 部分

$2\mathrm{h}(1) - 2\int_0^1 \mathrm{h}(x)\,\mathrm{d}x$ 這一項應該令我們想起分部積分。把 $1\cdot\mathrm{h}(x)$ 分部積分，取 x 為 1 的原函數（antiderivative），

$$\int_0^1 \mathrm{h}(x)\,\mathrm{d}x = \Big[x\,\mathrm{h}(x)\Big]_0^1 - \int_0^1 x\,\mathrm{h}'(x)\,\mathrm{d}x = \mathrm{h}(1) - \int_0^1 x\,\mathrm{h}'(x)\,\mathrm{d}x.$$

所以 $2\mathrm{h}(1) - 2\int_0^1 \mathrm{h}(x)\,\mathrm{d}x = 2\int_0^1 x\,\mathrm{h}'(x)\,\mathrm{d}x$，條件變為

$$\int_0^1 (\mathrm{h}'(x))^2\,\mathrm{d}x = 2\int_0^1 x\,\mathrm{h}'(x)\,\mathrm{d}x - \frac{1}{3}.$$

這恰好就是第 (ii) 部分的條件（即我們經第 (i) 部分得到的形式），只是以 h' 代替 g。重複同一論證（這需要 h' 連續，正如題目的本意），

$$\int_0^1 (\mathrm{h}'(x)-x)^2\,\mathrm{d}x = 0 \quad\Longrightarrow\quad \mathrm{h}'(x) = x \text{ 對於} 0 \leq x \leq 1.$$

積分得 $\mathrm{h}(x) = \frac{1}{2}x^2 + C$，而 $\mathrm{h}(0) = 0$ 給出 $C = 0$。因此

$$\mathrm{h}(x) = \tfrac{1}{2}x^2.$$

第 (iv) 部分

首先留意 $a \neq 0$，因為條件中含有 $1/a$。對照前面各部分，我們尋找一個形如 $\mathrm{e}^{ax}(\mathrm{k}(x) - \mathrm{p}(x))^2$ 的平方，使其交叉項（cross term）為 $-2\mathrm{k}(x)$。展開後交叉項為 $-2\mathrm{e}^{ax}\mathrm{p}(x)\mathrm{k}(x)$，

所以需要 $\mathrm{p}(x) = \mathrm{e}^{-ax}$：

$$\mathrm{e}^{ax}(\mathrm{k}(x) - \mathrm{e}^{-ax})^2 = \mathrm{e}^{ax}(\mathrm{k}(x))^2 - 2\mathrm{k}(x) + \mathrm{e}^{-ax}.$$

在 $[0,1]$ 上積分，前兩項用已知條件，最後一項用 $\int_0^1 \mathrm{e}^{-ax}\,\mathrm{d}x = \dfrac{1-\mathrm{e}^{-a}}{a}$：

$$\begin{aligned}\int_0^1 \mathrm{e}^{ax}(\mathrm{k}(x) - \mathrm{e}^{-ax})^2\,\mathrm{d}x &= \frac{\mathrm{e}^{-a}}{a} - \frac{1}{a^2} - \frac{1}{4} + \frac{1-\mathrm{e}^{-a}}{a} \\ &= \frac{1}{a} - \frac{1}{a^2} - \frac{1}{4} = -\Big(\frac{1}{a} - \frac{1}{2}\Big)^2 = -\frac{(a-2)^2}{4a^2}.\end{aligned}$$

左邊是一個非負連續函數的積分，所以 ≥ 0；右邊則 ≤ 0。因此兩邊都必須為零，迫使 $(a-2)^2 = 0$，所以 $a = 2$。

當 $a = 2$ 時，連續非負函數 $\mathrm{e}^{2x}(\mathrm{k}(x) - \mathrm{e}^{-2x})^2$ 的積分為零，所以按第 (ii) 部分的論證，它在 $[0,1]$ 上處處為零。由於 $\mathrm{e}^{2x} > 0$，得

$$\mathrm{k}(x) = \mathrm{e}^{-2x}, \qquad 0 \leq x \leq 1.$$

驗算

- 第 (i) 部分取 $\mathrm{f}(x) = x$：左邊為 $\int_0^1 \sqrt{x}\,\mathrm{d}x = \frac{2}{3}$，右邊為 $2\int_0^1 x^2\,\mathrm{d}x = \frac{2}{3}$。
- 第 (iii) 部分：取 $\mathrm{h} = \frac{1}{2}x^2$，則 $\int_0^1 x^2\,\mathrm{d}x = \frac{1}{3}$，而 $2\cdot\frac{1}{2} - 2\cdot\frac{1}{6} - \frac{1}{3} = \frac{1}{3}$。兩者相符。
- 第 (iv) 部分：取 $a = 2$ 及 $\mathrm{k} = \mathrm{e}^{-2x}$，左邊為 $\int_0^1 \mathrm{e}^{-2x}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}(1-\mathrm{e}^{-2}) \approx 0.43233$，右邊為 $(1-\mathrm{e}^{-2}) + \frac{1}{2}\mathrm{e}^{-2} - \frac{1}{4} - \frac{1}{4} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\mathrm{e}^{-2}$，兩者相同。另外以電腦對隨機的 a 及隨機多項式 k 驗證恆等式「左減右 $= \int \mathrm{e}^{ax}(\mathrm{k} - \mathrm{e}^{-ax})^2 + (a-2)^2/(4a^2)$」，結果亦相符。

常見錯誤

- 單憑積分為零就斷定 $\mathrm{g}(x) = x$，而沒有用到連續性和非負性：單是積分為零，甚麼也說明不了。
- 在第 (iv) 部分，忘記說明 $a \neq 0$，或在配方之前就嘗試估猜 k。

STEP 之外

$\int_0^1 \mathrm{f}(x)\mathrm{g}(x)\,\mathrm{d}x$ 這個量的表現就像「向量」f 與 g 的點積（dot product），而 $\int_0^1 (\mathrm{g}-x)^2\,\mathrm{d}x$ 則是 g 與 x 之間距離的平方。每一部分都在說「這個距離是零」，而第 (iv) 部分中的權 e^{ax} 則給出一個加權內積（weighted inner product）。這個觀點（內積空間（inner product space），以及範數（norm）為零的連續函數必為零這一事實）是大學一年級線

性代數（linear algebra）和分析（analysis）的核心內容；可參閱 Strang 的 *Introduction to Linear Algebra*（《線性代數導論》），以及 Abbott 的 *Understanding Analysis*（《理解分析》）。

Beyond STEP 詳細解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hant/。解答文字採用 CC0 1.0；題目本身版權屬 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予轉載。由機器從英文翻譯而成；尚未經審閱。