詳細解答

STEP III 2023，第 6 題

純數學 • 雙曲函數與單調性

> **STEP III 2023，第 6 題**
>
> 繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 OCR 提供下載的 2023 年 STEP 試卷（zip 檔案）內的 STEP III 試卷：
>
> www.ocr.org.uk/Images/707102-2023-past-papers.zip

關鍵思路

兩個函數(function)都是 $\tan^{-1} x$ 與 $\tanh x$ 的某個倍數之差，所以它們的導數(derivative)都是 $\dfrac{1}{1+x^2}$ 與 $\operatorname{sech}^2 x$ 的某個倍數之差。因此一切都歸結為比較 $\cosh^2 x$ 與 $1+x^2$：(i) 中的不等式（inequality）決定了 f' 的正負號；而證明比值 $\cosh^2 x/(1+x^2)$ 是遞增的，就能準確告訴我們它可以等於 $\frac{1}{2}\pi$ 多少次，而這正是 g' 等於零的地方。

解答

第 (i) 部分

利用 $\cosh^2 x = \frac{1}{2}(1+\cosh 2x)$ 及 $\cosh 2x = \frac{1}{2}(\mathrm{e}^{2x}+\mathrm{e}^{-2x})$，由 e^x 的麥克勞林級數（Maclaurin series）可得（奇次冪互相抵消）

$$\cosh 2x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2x)^{2n}}{(2n)!} = 1 + 2x^2 + \frac{2}{3}x^4 + \cdots.$$

每一項都是非負的，所以 $\cosh 2x \geq 1 + 2x^2$，因此

$$\cosh^2 x = \tfrac{1}{2}(1+\cosh 2x) \geq \tfrac{1}{2}(2+2x^2) = 1+x^2,$$

等號只在 $x = 0$ 時成立（當 $x \neq 0$ 時，x^4 項嚴格為正）。

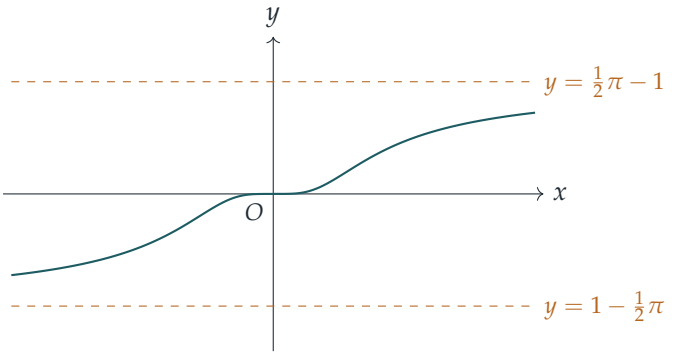
現在求導：

$$\mathrm{f}'(x) = \frac{1}{1+x^2} - \operatorname{sech}^2 x = \frac{1}{1+x^2} - \frac{1}{\cosh^2 x}.$$

由於 $\cosh^2 x \geq 1+x^2 > 0$，取倒數得 $\dfrac{1}{\cosh^2 x} \leq \dfrac{1}{1+x^2}$，所以對所有 x 都有 $\mathrm{f}'(x) \geq 0$，等號只在 $x = 0$ 處成立。一個除單一點外導數皆為正的函數是（嚴格）遞增（increasing）的，得證。

草圖。圖像上應標示的一些特徵：

- f 是奇函數（odd function），因為 $\tan^{-1}$ 和 tanh 都是奇函數；而且 $f(0) = 0$。
- $f'(0) = 0$ 但 f 是遞增的，所以原點是一個屬於拐點(point of inflection)的駐點(stationary point)。事實上 $\tan^{-1} x = x - \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{5}x^5 - \cdots$ 而 $\tanh x = x - \frac{1}{3}x^3 + \frac{2}{15}x^5 - \cdots$，所以在 0 附近 $f(x) \approx \frac{1}{15}x^5$：圖像在那裏非常平坦。
- 當 $x \to \infty$ 時，$\tan^{-1} x \to \frac{1}{2}\pi$ 而 $\tanh x \to 1$，所以 $f(x) \to \frac{1}{2}\pi - 1 \approx 0.571$，且從下方趨近；由奇性，當 $x \to -\infty$ 時 $f(x) \to 1 - \frac{1}{2}\pi$。



第 (ii)(a) 部分

此時

$$g'(x) = \frac{1}{1+x^2} - \frac{\pi}{2\cosh^2 x},$$

它是連續（continuous）的偶函數（even function）。在 $x = 0$ 處，$g'(0) = 1 - \frac{1}{2}\pi < 0$。在 $x = 2$ 處，

$$g'(2) = \tfrac{1}{5} - \frac{\pi}{2\cosh^2 2},$$

而 $\cosh 2 > \frac{1}{2}e^2 > 3.6$，所以 $\cosh^2 2 > 12.9$ 及 $\dfrac{\pi}{2\cosh^2 2} < \dfrac{1.6}{12.9} < \frac{1}{5}$；因此 $g'(2) > 0$。由介值定理（intermediate value theorem），g' 在 $(0,2)$ 內有一個零點；又因 g' 是偶函數，它在 $(-2,0)$ 內還有另一個零點。所以 g 至少有兩個駐點。

第 (ii)(b) 部分

設 $h(x) = (1+x^2)\sinh x - x\cosh x$。則

$$\begin{aligned} h'(x) &= 2x\sinh x + (1+x^2)\cosh x - \cosh x - x\sinh x \\ &= x\sinh x + x^2\cosh x. \end{aligned}$$

當 $x \geq 0$ 時，$x\sinh x$ 和 $x^2\cosh x$ 都是非負的（當 $x > 0$ 時更是正的），所以 h 在 $[0,\infty)$ 上遞增。由於 $h(0) = 0$，對 $x \geq 0$ 得 $h(x) \geq 0$；事實上，對 $x > 0$ 有 $h(x) > 0$。

第 (ii)(c) 部分

由商法則（quotient rule），

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{\cosh^2 x}{1+x^2}\right) = \frac{2\cosh x \sinh x\,(1+x^2) - 2x\cosh^2 x}{(1+x^2)^2} = \frac{2\cosh x\, h(x)}{(1+x^2)^2}.$$

當 $x \geq 0$ 時，$\cosh x > 0$，而由 (b) 得 $h(x) \geq 0$，所以導數非負；它只在 $x = 0$ 處為零。因此當 $x \geq 0$ 時，$\cosh^2 x/(1+x^2)$ 是（嚴格）遞增的。

第 (ii)(d) 部分

想一想 關於 $\cosh^2 x/(1+x^2)$ 的命題，怎樣可以用來數出 g' 的零點個數？

將 $\mathrm{g}'(x) = 0$ 兩邊乘以正數 $(1+x^2)\cosh^2 x$，可見

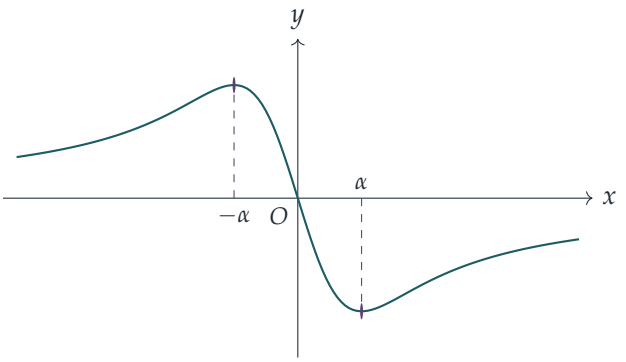
$$\mathrm{g}'(x) = 0 \iff \frac{\cosh^2 x}{1+x^2} = \frac{\pi}{2}.$$

記 $R(x) = \cosh^2 x/(1+x^2)$。在 $[0,\infty)$ 上，R 連續，且由 (c) 知其嚴格遞增，又 $R(0) = 1 < \frac{1}{2}\pi$，所以 R 在該區間上最多只取值 $\frac{1}{2}\pi$ 一次；由 (a)，它確實取到此值，取值點為某個 α，其中 $0 < \alpha < 2$。所以 g' 在 $[0,\infty)$ 內恰有一個零點。由於 R 是偶函數，$x < 0$ 時的零點正是 $x > 0$ 時零點的相反數，因此恰好還有一個零點，位於 $-\alpha$。所以 g 恰有兩個駐點，位於 $x = \pm\alpha$（數值上 $\alpha \approx 1.406$）。

第 (ii)(e) 部分

綜合已知事實：

- g 是奇函數，$\mathrm{g}(0) = 0$，且 $\mathrm{g}'(0) = 1 - \frac{1}{2}\pi < 0$。
- 由 (d)，在 $(-\alpha,\alpha)$ 上 $\mathrm{g}' < 0$（因為那裏 $R < \frac{1}{2}\pi$），而當 $|x| > \alpha$ 時 $\mathrm{g}' > 0$。所以在 $x = -\alpha$ 處有局部極大值（local maximum），在 $x = \alpha$ 處有局部極小值（local minimum），且 $\mathrm{g}(\alpha) = -\mathrm{g}(-\alpha) < 0$（約為 -0.44）。
- 當 $x \to \infty$ 時，$\mathrm{g}(x) \to \frac{1}{2}\pi - \frac{1}{2}\pi \cdot 1 = 0$。由於 g 在 (α,∞) 上遞增並趨向極限 0，它在那裏保持為負：圖像從下方趨近 x 軸。由奇性，當 $x \to -\infty$ 時 $\mathrm{g}(x) \to 0$，且從上方趨近。
- 所以 g 唯一的零點在原點：當 $x < 0$ 時 $\mathrm{g} > 0$，當 $x > 0$ 時 $\mathrm{g} < 0$。



驗算

- 在 $x = 1$ 處：$\cosh^2 1 \approx 2.381 \geq 2$，與 (i) 一致。
- $f(30) \approx 0.537$，從下方趨近 $\frac{1}{2}\pi - 1 \approx 0.571$；而 $f(0.1) \approx 6.6 \times 10^{-7}$，接近 $\frac{1}{15}(0.1)^5$。
- 數值求解 $\cosh^2 x = \frac{1}{2}\pi(1 + x^2)$ 得 $\alpha \approx 1.406$，正如 (a) 所預測般位於 $(0, 2)$ 內，且 $g(\alpha) \approx -0.440$。在 $[-20, 20]$ 上對 g' 作精細掃描，恰好找到兩次變號；而 $g(20) \approx -0.050$ 是一個很小的負數，與草圖相符。

常見錯誤

- 忘記 $\cosh^2 x \geq 1 + x^2$ 必須反轉為 $\operatorname{sech}^2 x \leq \dfrac{1}{1 + x^2}$；這樣做之所以成立，是因為兩邊都是正數。
- 在 (d) 中只證明了有一個正根，卻忘記利用偶性（或指出 $x = 0$ 不是根）來數出那個負根。
- 畫 g 的草圖時，用了 $y = 0$ 以外的漸近線（asymptote），或在 x 很大時再次穿過坐標軸；(α, ∞) 上的單調性（monotonicity）排除了這種情況。

STEP 之外

(ii) 中的方法（把「$g' = 0$ 有多少個解？」轉化為「一個單調函數取某個值多少次？」）是分析學家數根的基本方法：連續性加上介值定理給出存在性，嚴格單調性則給出唯一性。這些想法會在第一門分析（analysis）課程中得到嚴謹處理；Abbott 的 *Understanding Analysis*（《理解分析》）是觀看這些論證被仔細展開的絕佳之選。

Beyond STEP 詳細解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hant/。解答文字採用 CC0 1.0；題目本身版權屬 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予轉載。由機器從英文翻譯而成；尚未經審閱。