詳細解答

STEP III 2023，第 5 題

純數學 • 數論

> **STEP III 2023，第 5 題**
>
> 繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 OCR 提供下載的 2023 年 STEP 試卷（zip 檔案）內的 STEP III 試卷：
>
> www.ocr.org.uk/Images/707102-2023-past-papers.zip

關鍵思路

每一部分都把一條整數方程化為一個乘積（product），令它等於一個我們完全清楚其因數（factor）的數：先是 49，然後是 pq，再然後是 $3p^2q$。一旦方程的一邊是兩個整數的乘積，每個因數的大小（哪一個較大、哪一個小於 p）就能把可能情況縮減至一兩種。在第 (iii) 部分，我們能控制的因數是 $p+q-n$，而題目要求證明的不等式（inequality），正正就是阻止它與 p 或 q 有公因數的條件。

解答

第 (i) 部分

兩邊乘以 $7xy$（兩者皆非零），得

$$7y+14x=2xy \quad \Longleftrightarrow \quad 2xy-14x-7y=0.$$

由於 $(2x-7)(y-7)=2xy-14x-7y+49$，兩邊加上 49 便得 $(2x-7)(y-7)=49$，此即所求。

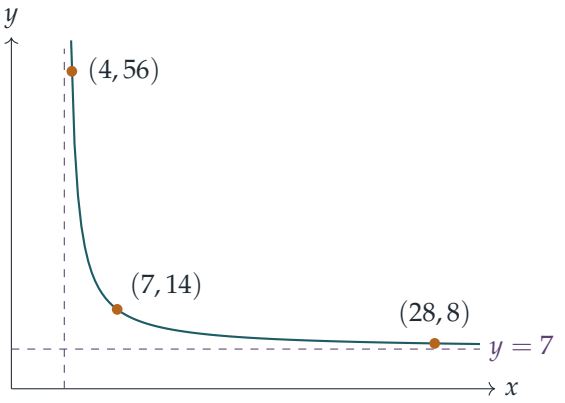
現設 x 和 y 為正整數。那麼 $2x-7$ 和 $y-7$ 是乘積為 49 的整數，所以它們是 49 的一組因數對（factor pair）：

$$(2x-7,\ y-7)\in\{(1,49),\,(7,7),\,(49,1),\,(-1,-49),\,(-7,-7),\,(-49,-1)\}.$$

正數條件排除了負數的因數對：$x\geq 1$ 迫使 $2x-7\geq -5$，而 $y\geq 1$ 迫使 $y-7\geq -6$，所以兩個因數都不可能是 -7 或 -49，而每一組負數因數對都含有其中之一。正數的因數對給出

$$(x,y)=(4,56),\quad (7,14),\quad (28,8),$$

而每一組都確實滿足原方程，例如 $\frac{1}{4}+\frac{2}{56}=\frac{7}{28}+\frac{1}{28}=\frac{2}{7}$。



這條曲線是一條直角雙曲線（rectangular hyperbola），漸近線（asymptote）為 $x=\frac{7}{2}$ 和 $y=7$；三個解就是它正分支上的格點（lattice point）。

第 (ii) 部分

展開得 $(p+q)^2=p^2+2pq+q^2=n^2+pq$，所以

$$(p+q+n)(p+q-n)=(p+q)^2-n^2=pq.$$

右方為正數，而 $p+q+n>0$，所以 $p+q-n$ 是一個正整數。pq 的正因數是 $1,p,q,pq$（若 $p=q$ 則只有 $1,p,p^2$），而 $p+q+n$ 是其中之一。但 $n>0$ 表示 $p+q+n>p$ 及 $p+q+n>q$，所以 $p+q+n$ 既不是 p 也不是 q；剩下的因數只有 pq。因此 $p+q+n=pq$，而另一個因數（co-factor）是

$$p+q-n=1, \qquad \text{即} \qquad p+q=n+1.$$

把 $n=p+q-1$ 代入 $p+q+n=pq$，得 $2p+2q-1=pq$，整理後得

$$pq-2p-2q+4=3 \quad \Longleftrightarrow \quad (p-2)(q-2)=3.$$

質數（prime）滿足 $p-2\geq 0$，所以兩個因數皆非負，而乘積為 3，故 $\{p-2,q-2\}=\{1,3\}$。因此

$$(p,q)=(3,5) \quad \text{或} \quad (5,3),$$

而事實上 $9+15+25=49=7^2$，且 $n=7=3+5-1$。

第 (iii) 部分

這裏 n 是 $p^3+q^3+3pq^2$ 的正實數立方根（cube root）。

不等式。由於 $p,q>0$，

$$n^3=q^3+(p^3+3pq^2)>q^3,\qquad n^3=p^3+(q^3+3pq^2)>p^3,$$

而立方函數是嚴格遞增（strictly increasing）的，所以 $n>q$ 及 $n>p$。整理後分別得 $p+q-n<p$ 及 $p+q-n<q$。我們亦需要下界（lower bound）：

$$(p+q)^3=p^3+3p^2q+3pq^2+q^3=n^3+3p^2q>n^3,$$

所以 $p+q>n$，即 $p+q-n>0$。

*沒有質數解。*假設 p 和 q 是質數，而 n 是整數。設 $d=p+q-n$，這是一個整數，且

$$0<d<p,\qquad 0<d<q.$$

由上面的展開式，$(p+q)^3-n^3=3p^2q$，再用立方差（difference of cubes）因式分解，

$$d\left((p+q)^2+(p+q)n+n^2\right)=3p^2q,$$

所以 d 整除 $3p^2q$。

想一想 為甚麼 d 不能與 p 或 q 有公因數？

因為 p 是質數，d 與 p 有公因數的唯一可能，是 p 整除 d，而這需要 $d\geq p$。但 $d<p$。同理，$d<q$ 表示 q 不整除 d。所以 d 與 p^2q 互質（coprime），而 $d\mid 3p^2q$ 便迫使 $d\mid 3$。這正是那些不等式的用處。因此 $d=1$ 或 $d=3$。設 $s=p+q$。

*情況 $d=1$。*此時 $n=s-1$，且

$$3p^2q=s^3-(s-1)^3=3s^2-3s+1,$$

這是不可能的：左方是 3 的倍數，而右方除以 3 的餘數是 1。

*情況 $d=3$。*此時 $3=d<p$ 及 $3<q$，所以 p 和 q 都不是 3。這裏 $n=s-3$，且

$$3p^2q=s^3-(s-3)^3=9s^2-27s+27,\qquad \text{所以}\qquad p^2q=3(s^2-3s+3).$$

因此 $3\mid p^2q$，而由於 3 是質數，它整除 p 或 q，使其中一個等於 3。這與 $p,q>3$ 矛盾。

兩種情況都不可能，所以不存在質數 p 和 q 使得 $p^3+q^3+3pq^2$ 是某整數的立方。 ■

驗算

對所有正整數 $x,y<2000$ 進行窮舉搜尋（brute-force search），恰好找到第 (i) 部分的三組解。在所有質數 $p,q<1500$ 之中，p^2+pq+q^2 只在 $\{p,q\}=\{3,5\}$ 時才是完全平方數（perfect square）（得 49），而 $p^3+q^3+3pq^2$ 從來不是完全立方數。隨機抽取的正實數確認了第 (iii) 部分中的 $0<p+q-n<\min(p,q)$。第 (ii) 部分的快速人手驗算：$(3+5+7)(3+5-7)=15\times 1=15=pq$。

常見錯誤

- 在第 (i) 部分忘記 49 的負數因數對。它們在這裏不產生任何解，但必須把它們排除，而不是置之不理。
- 在第 (ii) 部分，未經論證便假設 $p+q-n$ 是較小的因數且為正數：兩者都由 $n>0$ 及 $pq>0$ 推出，而且需要寫明。
- 在第 (iii) 部分，停在 $d \mid 3$。$d=1$ 和 $d=3$ 兩種情況仍然要排除，而第二種情況需要再次用到 $d<p,q$ 這個事實。

STEP 之外

每一部分都用了同一個技巧：把一條丟番圖方程（Diophantine equation）改寫成若干整數的乘積，令它等於一個已知其因數分解的數，然後利用大小和互質性確定各個因數。第 (i) 部分屬於埃及分數（Egyptian fraction）方程 $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{1}{n}$ 這一類，而第 (ii) 部分則關於含有一個 120° 角的整數邊三角形，因為 $p^2+pq+q^2=n^2$ 正是該角的餘弦定律（cosine rule）。Davenport 的 *The Higher Arithmetic*（《高等算術》）是這類初等數論（elementary number theory）的一本絕佳入門書。

Beyond STEP 詳細解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hant/。解答文字採用 CC0 1.0；題目本身版權屬 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予轉載。由機器從英文翻譯而成；尚未經審閱。