詳細解答

STEP III 2023，第 4 題

純數學 • 切比雪夫多項式的係數

STEP III 2023，第 4 題

繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 OCR 提供下載的 2023 年 STEP 試卷（zip 檔案）內的 STEP III 試卷：

www.ocr.org.uk/Images/707102-2023-past-papers.zip

關鍵思路

把 $\cos((2n+1)\theta)$ 寫成 $(\cos\theta + \mathrm{i}\sin\theta)^{2n+1}$ 的實部，就能把 p 化成一個明確的和式，而 p 的每個係數都變成二項式係數(binomial coefficient)之和。形如 $\sum\binom{N}{2r}$ 或 $\sum r\binom{N}{2r}$、只取偶數下標的和，可以把 $t=1$ 和 $t=-1$ 代入 $(1+t)^N$（或其導數（derivative)），再相加或相減求得，因為這樣奇數下標的項會互相抵消。最後一部分則比較因式分解(factorisation)兩邊最高的幾個係數。

解答

全文中記 $c=\cos\theta$ 及 $s=\sin\theta$。

第 (i) 部分

由棣美弗定理（de Moivre's theorem）及二項式定理（binomial theorem），

$$\cos((2n+1)\theta) + \mathrm{i}\sin((2n+1)\theta) = (c+\mathrm{i}s)^{2n+1} = \sum_{k=0}^{2n+1}\binom{2n+1}{k}c^{2n+1-k}(\mathrm{i}s)^k.$$

由於 c 和 s 是實數，實數項恰好是 k 為偶數的那些項，設 $k=2r$，其中 $0\le r\le n$，此時 $(\mathrm{i}s)^{2r} = (-1)^r s^{2r} = (-s^2)^r = (c^2-1)^r$。取實部，得

$$\cos((2n+1)\theta) = \sum_{r=0}^{n}\binom{2n+1}{2r}\cos^{2n+1-2r}\theta\,(\cos^2\theta - 1)^r,$$

即為所求。

第 (ii) 部分

由第 (i) 部分可知，對每個 $x = \cos\theta \in [-1,1]$，都有

$$\mathrm{p}(x) = 1 + \sum_{r=0}^{n} \binom{2n+1}{2r} x^{2n+1-2r}(x^2-1)^r$$

兩邊都是多項式（polynomial），且在無限多個點上相等，所以它們是同一個多項式。

第 r 項的次數是 $(2n+1-2r)+2r = 2n+1$，首項係數（leading coefficient）為 $\binom{2n+1}{2r}$，而常數 1 不影響 x^{2n+1}。所以 p 中 x^{2n+1} 的係數是

$$S_0 = \sum_{r=0}^{n} \binom{2n+1}{2r},$$

即偶數下標二項式係數之和。把 $t=1$ 和 $t=-1$ 代入 $(1+t)^{2n+1} = \sum_k \binom{2n+1}{k} t^k$，得

$$2^{2n+1} = \sum_k \binom{2n+1}{k}, \qquad 0 = \sum_k (-1)^k \binom{2n+1}{k}.$$

兩式相加，k 為奇數的項互相抵消，k 為偶數的項則加倍：$2S_0 = 2^{2n+1}$。因此 $\mathrm{p}(x)$ 中 x^{2n+1} 的係數是 $S_0 = 2^{2n}$。

第 (iii) 部分

在第 r 項 $x^{2n+1-2r}(x^2-1)^r$ 中，要得到 x^{2n-1}，需要取 $(x^2-1)^r$ 的 x^{2r-2} 項。該項是 $\binom{r}{1}(x^2)^{r-1}(-1) = -rx^{2r-2}$（當 $r=0$ 時此項不存在，與 $-r=0$ 一致）。由於 $n \geq 1$，有 $2n-1 \geq 1$，所以 p 中的常數 1 不起作用。因此 x^{2n-1} 的係數是

$$-\sum_{r=0}^{n} r \binom{2n+1}{2r}.$$

? **想一想** 當每個偶數下標項都以 r 加權時，怎樣才能把它們挑出來？

微分會把下標作為因子拉下來。由 $(1+t)^{2n+1} = \sum_k \binom{2n+1}{k} t^k$，得

$$(2n+1)(1+t)^{2n} = \sum_{k=1}^{2n+1} k \binom{2n+1}{k} t^{k-1}.$$

在 $t=1$ 時，得 $\sum_k k\binom{2n+1}{k} = (2n+1)2^{2n}$。在 $t=-1$ 時，左邊為 0（因為 $2n \geq 1$），所以

$$0 = \sum_k (-1)^{k-1} k \binom{2n+1}{k} = \sum_{k\text{ 奇數}} k \binom{2n+1}{k} - \sum_{k\text{ 偶數}} k \binom{2n+1}{k}.$$

所以 k 為偶數和 k 為奇數的兩部分相等，各佔總和的一半：

$$\sum_{k\text{ 偶數}} k \binom{2n+1}{k} = (2n+1)2^{2n-1}.$$

令 $k=2r$，這即是 $\sum_r 2r\binom{2n+1}{2r}=(2n+1)2^{2n-1}$，亦即 $\sum_r r\binom{2n+1}{2r}=(2n+1)2^{2n-2}$。因此 $\mathrm{p}(x)$ 中 x^{2n-1} 的係數是 $-(2n+1)2^{2n-2}$，即為所求。

第 (iv) 部分

首項係數。由 (ii)，p 的次數是 $2n+1$，首項係數為 2^{2n}。若 q 的次數是 m、首項係數是 a，則 $(x+1)[\mathrm{q}(x)]^2$ 的次數是 $2m+1$，首項係數是 a^2。所以 $m=n$ 及 $a^2=2^{2n}$，又因 $a>0$，q 中 x^n 的係數是 2^n。

關於 p 的另一個事實。每一項 $x^{2n+1-2r}(x^2-1)^r$ 都只含 x 的奇次冪，因為 $x^{2n+1-2r}$ 是奇次冪，而 $(x^2-1)^r$ 只有偶次冪。p 中唯一的偶次冪是常數 1。由於 $2n\geq 2$，p 中 x^{2n} 的係數是 0。

比較係數。現設 $n\geq 2$，並寫

$$\mathrm{q}(x)=2^n x^n+bx^{n-1}+cx^{n-2}+\cdots,$$

於是

$$[\mathrm{q}(x)]^2=2^{2n}x^{2n}+2^{n+1}b\,x^{2n-1}+(b^2+2^{n+1}c)x^{2n-2}+\cdots.$$

乘以 $x+1$ 後，$(x+1)[\mathrm{q}(x)]^2$ 中 x^{2n} 和 x^{2n-1} 的係數分別是

$$2^{n+1}b+2^{2n}\qquad 及\qquad (b^2+2^{n+1}c)+2^{n+1}b.$$

p 中 x^{2n} 的係數是 0，所以 $b=-2^{2n}/2^{n+1}=-2^{n-1}$。於是 $b^2=2^{2n-2}$ 及 $2^{n+1}b=-2^{2n}$，再把 x^{2n-1} 的係數與第 (iii) 部分的結果比較，得

$$2^{2n-2}+2^{n+1}c-2^{2n}=-(2n+1)2^{2n-2}.$$

整理得

$$2^{n+1}c=2^{2n-2}(-(2n+1)-1+4)=2^{2n-2}(2-2n)=2^{2n-1}(1-n),$$

所以 q 中 x^{n-2} 的係數是

$$c=2^{n-2}(1-n),$$

即為所求。

驗算

- 當 $n=1$：$\cos 3\theta=4\cos^3\theta-3\cos\theta$，所以 $\mathrm{p}(x)=4x^3-3x+1=(x+1)(2x-1)^2$。首項係數是 2^2，x 的係數是 $-3=-3\cdot 2^0$，而 q 的首項係數是 2^1。
- 當 $n=2$：$\mathrm{p}(x)=16x^5-20x^3+5x+1=(x+1)(4x^2-2x-1)^2$。$x^3$ 的係數是 $-20=-5\cdot 2^2$，而 q 的常數項是 $-1=2^0(1-2)$。

- 當 $n = 3$，我們求得 $\mathrm{q}(x) = 8x^3 - 4x^2 - 4x + 1$，其中 x 的係數等於 $-4 = 2^1(1 - 3)$。我們亦用電腦驗證過：對 $n = 1, \ldots, 12$，精確展開 $\cos\big((2n+1)\theta\big) + 1$，再求 $\mathrm{p}(x)/(x+1)$ 的平方根，每條係數公式都成立。

常見錯誤

- 忘記 p 的 x^{2n} 係數。它是 0，而正是這一點確定了 q 的 x^{n-1} 係數 b，要求 c 必須先知道它。
- 寫成 $(\mathrm{i}s)^{2r} = s^{2r}$，漏掉了符號 $(-1)^r$。正是這個符號令結果是 $\cos^2\theta - 1$ 而不是 $1 - \cos^2\theta$。
- 在 (iii) 中只把 $t = 1$ 代入導數，這樣得到的是對所有 k 的和，而不只是偶數項的和。

STEP 之外

滿足 $T_N(\cos\theta) = \cos N\theta$ 的多項式 T_N 就是 N 次的切比雪夫多項式（Chebyshev polynomial），而第 (ii) 和 (iii) 部分求出了它最高的兩個係數。(iv) 中的因式分解反映了一個事實：$T_{2n+1}(x) + 1$ 在 $x = -1$ 處有一個單根（simple root），而在其他每個使 $\cos\big((2n+1)\theta\big) = -1$ 的點處都有一個重根（double root）。切比雪夫多項式在逼近理論（approximation theory）中處於核心地位：在所有 N 次首一多項式（monic polynomial）之中，$2^{1-N}T_N$ 在 $[-1, 1]$ 上的最大絕對值最小。Siklos 的 *Advanced Problems in Mathematics*（《數學進階問題》）有更多同類題目。

Beyond STEP 詳細解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hant/。解答文字採用 CC0 1.0；題目本身版權屬 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予轉載。由機器從英文翻譯而成；尚未經審閱。