詳細解答

STEP III 2023，第 3 題

純數學 • 三次方程的複數根

> **STEP III 2023，第 3 題**
>
> 繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 OCR 提供下載的 2023 年 STEP 試卷（zip 檔案）內的 STEP III 試卷：
>
> www.ocr.org.uk/Images/707102-2023-past-papers.zip

關鍵思路

以 a 為基準點量度，三點分別是 $sb\mathrm{i}$、$-sb\mathrm{i}$ 和 b。乘以 i 會把向量（vector）轉一個直角，所以 a 是底邊的中點，而 b 沿着對稱軸方向。有了這個圖像，第 (ii) 部分只需運用韋達定理（Vieta's formulas）：各根之和為零，由此可用 a 表示 b，然後 a 在 p^3/q^2 中消去。第 (iii) 及 (iv) 部分把結果化為關於 $x = s^2 > 0$ 的單變量函數（function），從其圖像可看出它最小可以是多少。

解答

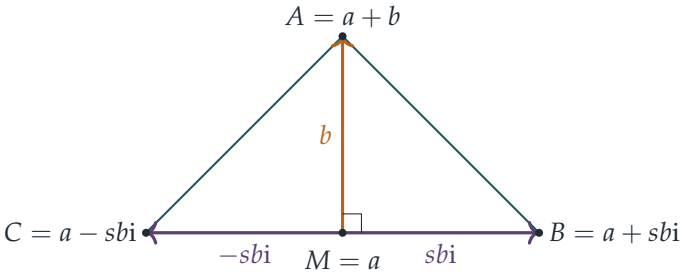
第 (i) 部分

由 $a + b$ 到另外兩點的距離為

$$|(a + sb\mathrm{i}) - (a + b)| = |b|\,|s\mathrm{i} - 1| = |b|\sqrt{s^2 + 1},$$
$$|(a - sb\mathrm{i}) - (a + b)| = |b|\,|-s\mathrm{i} - 1| = |b|\sqrt{s^2 + 1}.$$

兩者相等。我們還需要確認三點確實構成一個三角形。相對於 a，三點是 $sb\mathrm{i}$、$-sb\mathrm{i}$ 和 b。前兩點互不相同（因為 $s > 0$ 且 $b \neq 0$），並且位於經過 a、方向為 $b\mathrm{i}$ 的直線上。由於 $b\mathrm{i}$ 是 b 轉了一個直角，而 $b \neq 0$，所以第三點 $a + b$ 不在該直線上。因此這三點構成一個等腰三角形（isosceles triangle），頂點為 $a + b$，底邊由 $a - sb\mathrm{i}$ 到 $a + sb\mathrm{i}$，底邊中點為 a。

還原 a、b、s。設三角形的頂點為 A（即兩條等邊相交的頂點；若是等邊三角形，任取一個頂點即可），其餘兩個頂點為 B、C。設 M 為 BC 的中點。



- 取 $a = M = \frac{1}{2}(B + C)$。
- 取 $b = A - M$。由於 A 不在 BC 上，這不等於零。
- 由於 $AB = AC$，A 位於 BC 的垂直平分線（perpendicular bisector）上，所以 $MB \perp MA$。因此 $B - M$ 是把 b 轉一個直角再伸縮所得：對某個實數 $\lambda \neq 0$，有 $B - M = \lambda b\mathrm{i}$。若 $\lambda < 0$，就把 B 和 C 的標記互換，這會改變 λ 的正負號。於是 $s = \lambda > 0$ 為

$$s = \frac{MB}{MA} = \frac{\frac{1}{2}BC}{\text{三角形的高}}.$$

於是 $a + b = A$、$a + sb\mathrm{i} = B$ 及 $a - sb\mathrm{i} = M - (B - M) = C$，符合所求。

第 (ii) 部分

由第 (i) 部分，可把各根記為 $a + sb\mathrm{i}$、$a - sb\mathrm{i}$、$a + b$，其中 $b \neq 0$、$s > 0$。這個三次方程沒有 z^2 項，所以各根之和為零：

$$3a + b = 0, \qquad \text{所以} b = -3a,$$

而因為 $b \neq 0$，所以 $a \neq 0$。因此各根為

$$a(1 - 3s\mathrm{i}), \qquad a(1 + 3s\mathrm{i}), \qquad -2a.$$

前兩個根之積為 $a^2(1 + 9s^2)$，和為 $2a$。所以由韋達定理，

$$p = a^2(1 + 9s^2) + (-2a)(2a) = a^2(9s^2 - 3) = 3a^2(3s^2 - 1),$$
$$q = -(\text{各根之積}) = -(-2a)\,a^2(1 + 9s^2) = 2a^3(9s^2 + 1).$$

由於 $a \neq 0$，所以 $q \neq 0$，可以相除：

$$\frac{p^3}{q^2} = \frac{27a^6(3s^2 - 1)^3}{4a^6(9s^2 + 1)^2} = \frac{27(3s^2 - 1)^3}{4(9s^2 + 1)^2},$$

其中 s 是非零（事實上是正的）實數，符合所求。

第 (iii) 部分

設 $y = \dfrac{(3x-1)^3}{(9x+1)^2}$，定義域為 $x \neq -\frac{1}{9}$。由商法則（quotient rule），

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} &= \frac{9(3x-1)^2(9x+1)^2 - (3x-1)^3 \cdot 18(9x+1)}{(9x+1)^4} \\ &= \frac{9(3x-1)^2\big[(9x+1) - 2(3x-1)\big]}{(9x+1)^3} = \frac{27(3x-1)^2(x+1)}{(9x+1)^3}.\end{aligned}$$

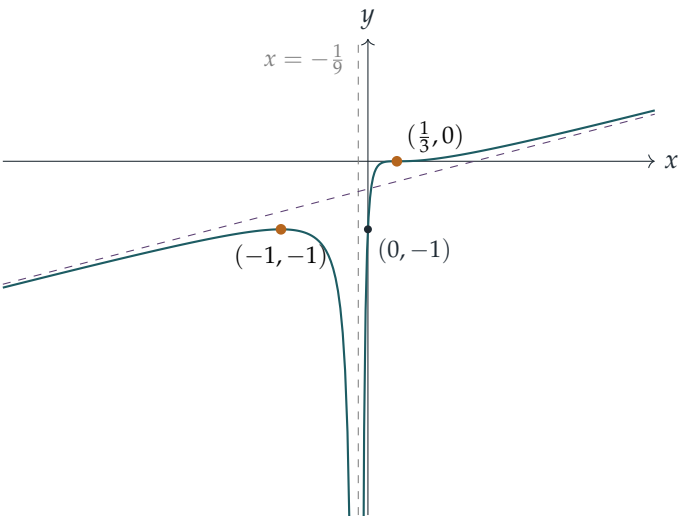
所以駐點（stationary point）位於 $x = -1$ 及 $x = \frac{1}{3}$。

- 在 $x = -1$：$y = (-4)^3/(-8)^2 = -1$。當 $x < -1$ 時，因子 $x+1$ 和 $(9x+1)^3$ 皆為負，所以 $y' > 0$。當 $-1 < x < -\frac{1}{9}$ 時，只有 $(9x+1)^3$ 為負，所以 $y' < 0$。因此 $(-1,-1)$ 是**局部極大點**（local maximum）。
- 在 $x = \frac{1}{3}$：$y = 0$。在其兩側（對 $x > -\frac{1}{9}$），除 $(3x-1)^2$ 外每個因子皆為正，而當 $x \neq \frac{1}{3}$ 時 $(3x-1)^2 > 0$。所以兩側皆有 $y' > 0$，因此 $(\frac{1}{3}, 0)$ 是**駐拐點**（stationary point of inflection）。

特別地，y 在 $x > -\frac{1}{9}$ 上嚴格遞增（strictly increasing），因為除單一點 $x = \frac{1}{3}$ 外，該處皆有 $y' > 0$。

其他特徵：

- 垂直漸近線（vertical asymptote）$x = -\frac{1}{9}$。在該處分子趨向 $(-\frac{4}{3})^3 < 0$，分母趨向 0^+，所以從兩側皆有 $y \to -\infty$。
- 把 $27x^3 - 27x^2 + 9x - 1$ 除以 $81x^2 + 18x + 1$，得商式 $\frac{1}{3}x - \frac{11}{27}$，所以當 $x \to \pm\infty$ 時，$y = \frac{1}{3}x - \frac{11}{27}$ 是一條斜漸近線（oblique asymptote）。
- 曲線與坐標軸相交於 $(0,-1)$ 及 $(\frac{1}{3}, 0)$。



虛線是斜漸近線 $y = \frac{1}{3}x - \frac{11}{27}$。左支永不高於 -1。右支由 $-\infty$ 遞增，經過每一個實數值。

第 (iv) 部分

由第 (ii) 部分，取該部分所得的實數 $s \neq 0$，並設 $x = s^2$，

$$\frac{p^3}{q^2} = \frac{27}{4} \cdot \frac{(3x-1)^3}{(9x+1)^2}.$$

由於 s 是實數，右方是實數，因此 p^3/q^2 亦是實數。

想一想 圖像向下伸延至 $-\infty$，那麼為甚麼 p^3/q^2 不能是很大的負數？

因為 $x = s^2$ 並非任意實數：s 是非零實數，所以 $x > 0$。因此我們關心的 x 值都位於右支上，而（由第 (iii) 部分）y 在右支上嚴格遞增。所以對 $x > 0$，

$$\frac{(3x-1)^3}{(9x+1)^2} > \frac{(0-1)^3}{(0+1)^2} = -1,$$

因此

$$\frac{p^3}{q^2} > -\frac{27}{4}.$$

這個不等式（inequality）是嚴格的，因為 $x = 0$（即 $s = 0$）被排除了：那會使三角形退化成一條線段。

驗算

- 等邊三角形：$z^3 - 1 = 0$ 的根構成一個等邊三角形(equilateral triangle)。此時 $p = 0$，而公式給出 $p = 0$ 當且僅當 $s^2 = \frac{1}{3}$，即底邊的一半等於高的 $\frac{1}{\sqrt{3}}$ 倍，這正是等邊三角形的形狀。
- 一個具體例子：$a = 1$、$s = 1$ 給出根 $1 \pm 3\mathrm{i}$ 及 -2，所以方程為 $z^3 + 6z + 20 = 0$。於是 $p^3/q^2 = 216/400 = \frac{27}{50}$，而公式給出 $\frac{27 \cdot 8}{4 \cdot 100} = \frac{27}{50}$。
- 當 $s \to 0$ 時，三角形壓扁，趨向在 a 處的二重根，而 $p^3/q^2 \to -\frac{27}{4}$：$4p^3 + 27q^2 = 0$ 正是有重根（repeated root）的條件。當 $s = 10^{-4}$ 時，其值約為 -6.749998。
- 以電腦檢驗了隨機生成、形心（centroid）在原點的等腰三角形：p^3/q^2 總是實數，且大於 -6.75。

常見錯誤

- 在第 (i) 部分把 a 和 b 當作實數。它們是複數，所以三角形可以朝任何角度擺放。
- 弄錯 q 的正負號：對首一三次多項式（monic cubic）而言，q 是各根之積的負數。
- 在第 (iv) 部分使用整個圖像，忘記了 $x = s^2 > 0$，而正是這一點使我們停留在右支上。

STEP 之外

量 $-(4p^3 + 27q^2)$ 是這個三次多項式的判別式（discriminant），而 p^3/q^2 是一個形狀不變量（invariant）：當各根繞其形心旋轉或伸縮時，它保持不變（把 z 換成 kz，會使 p 乘以 k^2、q 乘以 k^3），所以它只記錄了根所構成三角形的形狀。這類不變量是在變數變換下對多項式進行分類的起點。Needham 的 *Visual Complex Analysis*（《直觀複分析》）是一本出色的指南，教你像本題所要求那樣，以幾何方式思考複數。

Beyond STEP 詳細解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hant/。解答文字採用 CC0 1.0；題目本身版權屬 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予轉載。由機器從英文翻譯而成；尚未經審閱。