詳細解答

STEP III 2023，第 2 題

純數學 • 極坐標曲線的面積

STEP III 2023，第 2 題

繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 OCR 提供下載的 2023 年 STEP 試卷（zip 檔案）內的 STEP III 試卷：

www.ocr.org.uk/Images/707102-2023-past-papers.zip

關鍵思路

兩條曲線都是由一條從 $\theta = 0$ 掃到 $\theta = \pi$ 的半徑畫出來的，所以整道題目的重點在於：在每個角度上，哪一條曲線離原點較遠。比較 $k(1+\sin\theta)$ 與 $k+\cos\theta$，可見兩者恰好在 $\theta = \alpha$ 處交換一次位置。於是 A 與 B 兩個區域合起來，正是兩條曲線所圍區域的重疊部分；而所有面積都來自極坐標（polar coordinates）面積公式 $\frac{1}{2}\int r^2\,\mathrm{d}\theta$，其中 $\sin^2$ 和 $\cos^2$ 用倍角公式（double angle formulae）處理。

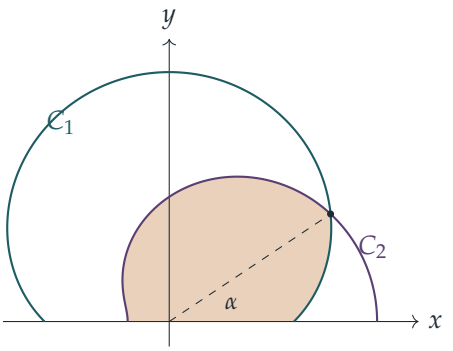
解答

第 (i) 部分

先算一些數值，有助作草圖：

	$\theta = 0$	$\theta = \frac{\pi}{2}$	$\theta = \pi$
C_1: $r = k(1+\sin\theta)$	k	$2k$	k
C_2: $r = k+\cos\theta$	$k+1$	k	$k-1$

由於 $k > 1$，兩個半徑在整個範圍內都是正數。C_1 是心臟線（cardioid）的上半部分，關於 y 軸對稱，最高到達 $(0, 2k)$。C_2 是一個稍微壓扁、「半徑約為 k」的半圓，在 $\theta = 0$ 處向右推出 1 個單位，在 $\theta = \pi$ 處向內收入 1 個單位。下圖取 $k = 1.5$；陰影部分是兩條曲線所圍區域的重疊部分。



在交點處兩個半徑相等，所以

$$k(1+\sin\alpha) = k+\cos\alpha \iff k\sin\alpha = \cos\alpha.$$

這裏 $\cos\alpha \neq 0$（否則便需要 $k\sin\alpha = 0$，但此時 $\sin\alpha = \pm 1$），因此兩邊相除得 $\tan\alpha = \frac{1}{k}$，即所求。由於 $0 < \frac{1}{k} < 1$，在 $[0,\pi]$ 內恰好有一個這樣的角，而且 $0 < \alpha < \frac{\pi}{4}$。

更有用的是，$k+\cos\theta - k(1+\sin\theta) = \cos\theta - k\sin\theta$，它在 $0 \le \theta < \alpha$ 時為正，在 $\alpha < \theta \le \pi$ 時為負（利用下面 $\sin\alpha$、$\cos\alpha$ 的值，它等於 $\sqrt{1+k^2}\,\sin(\alpha-\theta)$，而 $\alpha-\theta$ 分別落在 $(0,\alpha]$ 或 $[\alpha-\pi,0)$ 之內）。所以在 α 之前 C_2 在 C_1 之外，在 α 之後則在 C_1 之內。

我們亦會用到由 $\tan\alpha = \frac{1}{k}$ 得出的

$$\sin\alpha = \frac{1}{\sqrt{1+k^2}}, \qquad \cos\alpha = \frac{k}{\sqrt{1+k^2}}.$$

第 (ii) 部分

區域 A 是在 $0 \le \theta \le \alpha$ 時，由伸到 C_1 的半徑掃出來的，所以其面積為

$$\begin{aligned}
\tfrac{1}{2}\int_0^\alpha k^2(1+\sin\theta)^2\,\mathrm{d}\theta &= \frac{k^2}{2}\int_0^\alpha \left(1+2\sin\theta+\tfrac{1}{2}-\tfrac{1}{2}\cos 2\theta\right)\mathrm{d}\theta \\
&= \frac{k^2}{2}\left[\tfrac{3}{2}\theta - 2\cos\theta - \tfrac{1}{4}\sin 2\theta\right]_0^\alpha \\
&= \frac{k^2}{2}\left(\tfrac{3}{2}\alpha - \tfrac{1}{2}\sin\alpha\cos\alpha - 2\cos\alpha + 2\right) \\
&= \frac{k^2}{4}(3\alpha - \sin\alpha\cos\alpha) + k^2(1-\cos\alpha),
\end{aligned}$$

這裏用了 $\sin^2\theta = \frac{1}{2}(1-\cos 2\theta)$ 和 $\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha$。這正是所求的表達式。

第 (iii) 部分

同樣地，利用 $\cos^2\theta = \frac{1}{2}(1+\cos 2\theta)$，B 的面積為

$$\begin{aligned}\tfrac{1}{2}\int_\alpha^\pi (k+\cos\theta)^2\,\mathrm{d}\theta &= \tfrac{1}{2}\int_\alpha^\pi \left(k^2+\tfrac{1}{2}+2k\cos\theta+\tfrac{1}{2}\cos 2\theta\right)\mathrm{d}\theta\\ &= \tfrac{1}{2}\left[\left(k^2+\tfrac{1}{2}\right)\theta+2k\sin\theta+\tfrac{1}{4}\sin 2\theta\right]_\alpha^\pi\\ &= \frac{(2k^2+1)(\pi-\alpha)}{4}-k\sin\alpha-\tfrac{1}{4}\sin\alpha\cos\alpha.\end{aligned}$$

如果想消去 α 的三角函數，可用第 (i) 部分的數值：$k\sin\alpha = \dfrac{k}{\sqrt{1+k^2}}$，$\sin\alpha\cos\alpha = \dfrac{k}{1+k^2}$，所以

$$\text{B 的面積} = \frac{(2k^2+1)(\pi-\alpha)}{4}-\frac{k}{\sqrt{1+k^2}}-\frac{k}{4(1+k^2)}.$$

第 (iv) 部分

想一想 A 與 B 合起來的區域是甚麼形狀？

由第 (i) 部分，當 $\theta<\alpha$ 時，A 的邊界是位於內側的曲線 C_1；當 $\theta>\alpha$ 時，B 的邊界是位於內側的曲線 C_2。所以 R 是兩個區域重疊部分的面積（即草圖中的陰影部分）。這已經提示了答案：當 k 很大時，C_2 幾乎完全位於 C_1 之內，所以重疊部分應該差不多就是整個 T。

整個區域的面積可由同樣的積分在 $[0,\pi]$ 上計算得出（$\sin\theta$ 和 $\sin 2\theta$ 項在兩端都給出 0；$-2\cos\theta$ 給出 4）：

$$T=\tfrac{1}{2}\int_0^\pi (k+\cos\theta)^2\,\mathrm{d}\theta=\frac{\pi(2k^2+1)}{4},\qquad S=\tfrac{1}{2}\int_0^\pi k^2(1+\sin\theta)^2\,\mathrm{d}\theta=\frac{k^2(3\pi+8)}{4}.$$

當 $k\to\infty$ 時，$\alpha=\arctan\frac{1}{k}\to 0$。與其展開 A，不如為它找一個上界：在 $[0,\alpha]$ 上有 $r=k(1+\sin\theta)\le 2k$，所以 A 位於一個半徑為 $2k$、圓心角為 α 的扇形（sector）之內；又因為 $\alpha<\tan\alpha=\frac{1}{k}$，

$$0<\text{A 的面積}\le\tfrac{1}{2}(2k)^2\alpha<2k.$$

因此 $\dfrac{\text{A}}{T}<\dfrac{8k}{\pi(2k^2+1)}\to 0$。至於 B，把第 (iii) 部分的結果除以 T，

$$\frac{\text{B}}{T}=\frac{\pi-\alpha}{\pi}-\frac{4\left(k\sin\alpha+\frac{1}{4}\sin\alpha\cos\alpha\right)}{\pi(2k^2+1)}\to 1-0=1,$$

因為 $\alpha\to 0$，而且 $0<k\sin\alpha+\frac{1}{4}\sin\alpha\cos\alpha<k+1$，與 $2k^2+1$ 相比微不足道。因此

$$\frac{R}{T}=\frac{\text{A}}{T}+\frac{\text{B}}{T}\to 1.$$

最後

$$\frac{R}{S} = \frac{R}{T}\cdot\frac{T}{S} = \frac{R}{T}\cdot\frac{\pi(2k^2+1)}{k^2(3\pi+8)} \to 1\cdot\frac{2\pi}{3\pi+8} = \frac{2\pi}{3\pi+8}.$$

驗算

- 在 $\theta = 0$ 處，C_2（$r = k+1$）在 C_1（$r = k$）之外；在 $\theta = \frac{\pi}{2}$ 處則在其內（$k < 2k$），所以兩條曲線必定在兩者之間相交，與 $0 < \alpha < \frac{\pi}{4}$ 一致。
- 取 $k = 2$：$\alpha = \arctan\frac{1}{2} \approx 0.4636$，A ≈ 1.4132，B ≈ 5.0309，$T = \frac{9}{4}\pi \approx 7.0686$，所以 $R/T \approx 0.912$。直接對 $\frac{1}{2}r^2$ 作數值積分，結果與兩條公式都吻合。
- 取 $k = 50$，$R/T \approx 0.99987$，$R/S \approx 0.36061$，接近 $\frac{2\pi}{3\pi+8} \approx 0.36059$。
- 對極限作一個合理性檢查：當 k 極大時，C_2 近似一個半徑為 k 的半圓（面積 $\frac{1}{2}\pi k^2$），而 C_1 是一個固定的半心臟線放大 k 倍，該半心臟線的面積為 $\frac{3\pi}{4}+2$；兩者之比為 $\frac{2\pi}{3\pi+8}$。

常見錯誤

- 忘記極坐標面積公式中的因子 $\frac{1}{2}$，或把 $1+\sin\theta$ 的平方誤寫成 $1+\sin^2\theta$。
- 在第 (iv) 部分中，聲稱 $k^2(1-\cos\alpha)$「因為 $\alpha \to 0$ 所以趨於 0」：它乘了 k^2，事實上它趨於 $\frac{1}{2}$。真正重要的只是它相對於 T 的大小。

STEP 之外

求兩個以極坐標形式給出的區域的重疊面積，是初嘗大學一年級多變數微積分（multivariable calculus）中面積積分 $\iint r\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\theta$ 的滋味；在那裏，最難的部分總是描述區域本身，正如本題一樣。第 (iv) 部分的極限論證（為某一項找上界，而不是精確計算它）正是實分析（real analysis）的風格；Abbott 的 *Understanding Analysis*（《理解分析》）是觀摩這種風格如何被細緻發展的好地方。

Beyond STEP 詳細解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hant/。解答文字採用 CC0 1.0；題目本身版權屬 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予轉載。由機器從英文翻譯而成；尚未經審閱。