詳細解答

STEP III 2023，第 11 題

概率與統計 • 條件期望值

STEP III 2023，第 11 題

繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 OCR 提供下載的 2023 年 STEP 試卷（zip 檔案）內的 STEP III 試卷：

www.ocr.org.uk/Images/707102-2023-past-papers.zip

關鍵思路

只要把 $k+1=k+1$ 寫開，並把 k 與 $k!$ 約去，開首的級數（series）便分拆成兩個熟悉的指數級數（exponential series）。在第 (i) 部分，D 的分佈（distribution）涉及一個求和，遍及所有可能產生 $D=d$ 的 Y 值；交換二重和（double sum）的求和次序後，內層的和就變成簡單的 $1+2+\cdots+k$，而隨之出現的因子 $\frac{1}{2}(k+1)$ 正好可以用開首的級數處理。第 (ii) 部分則只需以骰子的結果作條件（conditioning）。

解答

級數

當 $k \geq 1$ 時，$\dfrac{k}{k!}=\dfrac{1}{(k-1)!}$，因此把分子拆開，得

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{k+1}{k!}x^k &= \sum_{k=1}^{\infty}\frac{x^k}{(k-1)!}+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{x^k}{k!}\\ &= x\sum_{j=0}^{\infty}\frac{x^j}{j!}+\left(\sum_{k=0}^{\infty}\frac{x^k}{k!}-1\right)\\ &= xe^x+e^x-1=(x+1)e^x-1,\end{aligned}$$

其中第一個和用了 $j=k-1$。兩個級數對每個實數 x 都收斂（converge），所以這樣拆開是合理的。這就是所求的恆等式。

第 (i)(a) 部分

$D = 0$ 當且僅當 $Y = 0$（若 $Y = k \geq 1$，骰子顯示的數至少是 1），所以

$$\mathrm{P}(D = 0) = \mathrm{P}(Y = 0) = \mathrm{e}^{-n}.$$

第 (i)(b) 部分

固定 $d \geq 1$。骰子只有在至少有 d 面時才可能顯示 d，即只有當 $Y = k$ 且 $k \geq d$ 時才可能；而在 $Y = k \geq d$ 的條件下，公正的骰子顯示 d 的概率是 $\frac{1}{k}$。根據全概率定律（law of total probability），

$$\mathrm{P}(D = d) = \sum_{k=d}^{\infty} \mathrm{P}(D = d \mid Y = k)\,\mathrm{P}(Y = k) = \sum_{k=d}^{\infty} \frac{1}{k} \cdot \frac{n^k}{k!}\mathrm{e}^{-n}.$$

按定義，$\mathrm{E}(D) = \sum_{d=0}^{\infty} d\,\mathrm{P}(D = d)$，而 $d = 0$ 的項為零，所以

$$\mathrm{E}(D) = \sum_{d=1}^{\infty} \left[d \sum_{k=d}^{\infty} \left(\frac{1}{k} \cdot \frac{n^k}{k!}\mathrm{e}^{-n} \right) \right],$$

正如所求。

> **想一想** 一個外層對 d 求和、內層對 $k \geq d$ 求和的式子，怎樣才能變成外層對 k 求和？

這個二重和遍及所有滿足 $1 \leq d \leq k$ 的整數對 (d, k)。每一項 $\dfrac{d}{k} \cdot \dfrac{n^k}{k!}\mathrm{e}^{-n}$ 都是非負的，所以我們可以按任何次序把各項相加，總和不變。改為按 k 而不是按 d 分組：對每個 $k \geq 1$，d 由 1 取到 k。因此

$$\mathrm{E}(D) = \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1}{k} \cdot \frac{n^k}{k!}\mathrm{e}^{-n} \sum_{d=1}^{k} d \right),$$

這就是所求的第二個形式。

第 (i)(c) 部分

利用 $\sum_{d=1}^{k} d = \frac{1}{2}k(k+1)$，因子 $\frac{1}{k}$ 被約去：

$$\begin{aligned} \mathrm{E}(D) &= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} \cdot \frac{n^k}{k!}\mathrm{e}^{-n} \cdot \frac{k(k+1)}{2} = \frac{\mathrm{e}^{-n}}{2} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k+1}{k!} n^k \\ &= \frac{\mathrm{e}^{-n}}{2}\left((n+1)\mathrm{e}^{n} - 1 \right) = \tfrac{1}{2}\left(n + 1 - \mathrm{e}^{-n} \right), \end{aligned}$$

這裏用了開首的恆等式，並取 $x = n$。這就是所求的結果。

第 (ii)(a) 部分

設 K 為 n 面骰子顯示的數，則對 $k = 1, \ldots, n$ 有 $\mathrm{P}(K = k) = \frac{1}{n}$；而在 $K = k$ 的條件下，$Z = X_k$，它服從均值為 k 的泊松分佈（Poisson distribution）。所以 $\mathrm{P}(Z = 0 \mid K = k) = \mathrm{e}^{-k}$，再根據全概率定律，

$$\mathrm{P}(Z = 0) = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \mathrm{e}^{-k}.$$

這是首項為 e^{-1}、公比為 e^{-1} 的幾何級數（geometric series）：

$$\mathrm{P}(Z = 0) = \frac{1}{n} \cdot \frac{\mathrm{e}^{-1}\left(1 - \mathrm{e}^{-n}\right)}{1 - \mathrm{e}^{-1}} = \frac{1 - \mathrm{e}^{-n}}{n(\mathrm{e} - 1)},$$

最後一步是把分子和分母同乘以 e。

第 (ii)(b) 部分

再次以骰子的結果作條件，$\mathrm{E}(Z \mid K = k) = \mathrm{E}(X_k) = k$，所以

$$\mathrm{E}(Z) = \sum_{k=1}^{n} \mathrm{E}(Z \mid K = k)\,\mathrm{P}(K = k) = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} k = \frac{1}{n} \cdot \frac{n(n+1)}{2} = \frac{n+1}{2}.$$

與第 (i)(c) 部分比較，

$$\mathrm{E}(Z) - \mathrm{E}(D) = \frac{n+1}{2} - \frac{n+1-\mathrm{e}^{-n}}{2} = \tfrac{1}{2}\mathrm{e}^{-n} > 0,$$

所以 $\mathrm{E}(Z) > \mathrm{E}(D)$，正如所求。

有趣的是，如果沒有零的情況，兩者便會相等：一顆面數 Y 服從泊松分佈的公正骰子，平均顯示 $\frac{1}{2}(Y+1)$，而它的均值是 $\frac{1}{2}(n+1)$。唯一的損失在於 $Y = 0$ 時得到 $D = 0$，而不是公式 $\frac{1}{2}(Y+1)$ 所給出的 $\frac{1}{2}$；這情況發生的概率是 e^{-n}，恰好令期望值（expectation）少了 $\frac{1}{2}\mathrm{e}^{-n}$。

驗算

- 取 $x = 0$，開首的恆等式變成 $0 = 1 \cdot 1 - 1$；取 $x = 1$，則得 $\sum_{k \geq 1} \frac{k+1}{k!} = 2\mathrm{e} - 1 \approx 4.4366$，部分和亦證實了這一點。
- 當 $n = 3$ 時：$\mathrm{E}(D) = \frac{1}{2}(4 - \mathrm{e}^{-3}) \approx 1.9751$，$\mathrm{E}(Z) = 2$，以及 $\mathrm{P}(Z = 0) \approx 0.1843$。以電腦把每個實驗各模擬 200 000 次，得到 1.970、2.002 和 0.185。
- 當 $n = 1$ 時，第 (ii) 部分的骰子必定顯示 1，所以 $\mathrm{P}(Z = 0) = \mathrm{e}^{-1}$；公式給出 $\frac{1-\mathrm{e}^{-1}}{\mathrm{e}-1} = \mathrm{e}^{-1}$。

常見錯誤

- 在 (i)(b) 中把內層的和由 $k = 1$ 而不是由 $k = d$ 開始：k 面骰子不可能顯示比 k 大的數。
- 忘記開首恆等式中的 -1，它來自 e^x 中缺少的 $k = 0$ 項；正是它產生了 (i)(c) 中的 e^{-n}。

STEP 之外

兩個部分都是塔性質（tower law）$\mathrm{E}(Z) = \mathrm{E}\big(\mathrm{E}(Z \mid K)\big)$ 的實例：在第 (i) 部分，它一行便給出 $\mathrm{E}(D) = \mathrm{E}\big(\frac{1}{2}(Y+1)\mathbf{1}_{Y\geq 1}\big)$，而我們親手完成的交換求和次序，正是這條定律背後所隱藏的步驟。可以自由重排非負項二重級數的次序，是一條定理（其一般形式為 Tonelli 定理），在大學一年級的分析（analysis）課程中會遇到。Grimmett 與 Welsh 的 *Probability: An Introduction*（《概率導論》）討論了條件期望（conditional expectation）以及由它建構的複合分佈（compound distributions）。

Beyond STEP 詳細解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hant/。解答文字採用 CC0 1.0；題目本身版權屬 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予轉載。由機器從英文翻譯而成；尚未經審閱。