詳細解答

STEP III 2023，第 10 題

力學 • 桿的平衡

STEP III 2023，第 10 題

繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 OCR 提供下載的 2023 年 STEP 試卷（zip 檔案）內的 STEP III 試卷：

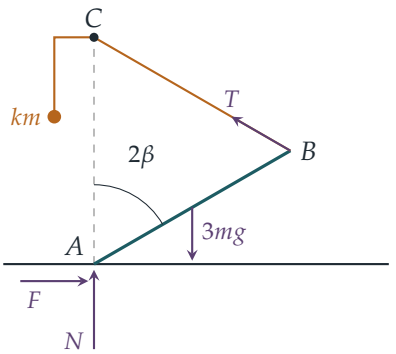
www.ocr.org.uk/Images/707102-2023-past-papers.zip

關鍵思路

滑輪（pulley）恰好位於 A 正上方一條橫桿長度之處，因此 A、B、C 組成一個等腰三角形（isosceles triangle），其中 $AB = AC = 2h$。這個幾何關係讓我們不費吹灰之力便得到繩子的方向，以及繩子與 A 的垂直距離。之後，一切都按處理平衡（equilibrium）中的桿的慣常步驟進行：對 A 取力矩（moments）（這樣便同時消去兩個未知的接觸力），分解（resolve）各力，再加上條件 $F \leq \mu N$。

解答

我們把橫桿視為均勻桿（uniform rod），兩個質點（particle）視為點質量，繩子視為輕而不可伸長（light and inextensible），並跨過一個光滑（smooth）滑輪，因此整條繩的張力（tension）相同。由於懸掛的質點處於平衡，張力為 $T = kmg$。



設 A 為原點，x 軸水平（指向 B 所在的一側），y 軸鉛垂向上。於是 $C = (0, 2h)$，而

$B = 2h(\sin 2\beta, \cos 2\beta)$。

繩子的方向。由 B 指向 C 的向量（vector）為

$$2h\big(-\sin 2\beta,\ 1-\cos 2\beta\big) = 4h\sin\beta\,(-\cos\beta,\ \sin\beta),$$

這裏用了 $1-\cos 2\beta = 2\sin^2\beta$。因此，作用於橫樑的張力有沿 $-x$ 方向（即指回直線 AC）的水平分量 $T\cos\beta$，以及向上的鉛垂分量 $T\sin\beta$。從幾何角度看：在等腰三角形 ABC 中，兩個底角均為 $90^\circ - \beta$，所以 BC 與水平線所成的角為 β。

力臂（*moment arm*）。由 A 到 BC 的垂線平分等腰三角形的頂角 2β，所以其長度為 $2h\cos\beta$。

第 (i) 部分

對 A 取力矩。重量 $3mg$ 作用於 AB 的中點，與 A 的水平距離為 $h\sin 2\beta$。令它與張力的力矩相等：

$$kmg\cdot 2h\cos\beta = 3mg\cdot h\sin 2\beta = 6mgh\sin\beta\cos\beta.$$

由於 $0 < 2\beta < 180^\circ$，故 $\cos\beta \neq 0$，可以兩邊除以它：

$$\boxed{k = 3\sin\beta.}$$

（這與 $k < 3$ 一致。）

分解各力。鉛垂方向：$N + T\sin\beta = 3mg$，所以

$$N = 3mg - 3mg\sin^2\beta = 3mg\cos^2\beta.$$

水平方向：摩擦力（friction）必須抵消繩子的水平拉力，因此它沿 $+x$ 方向作用，且

$$F = T\cos\beta = 3mg\sin\beta\cos\beta.$$

故 $F/N = \tan\beta$。

摩擦條件。平衡要求 $F \le \mu N$，即 $\tan\beta \le \mu$。而

$$k^2 = 9\sin^2\beta = \frac{9\tan^2\beta}{1+\tan^2\beta}.$$

函數（function）$t \mapsto \dfrac{t}{1+t} = 1 - \dfrac{1}{1+t}$ 在 $t \ge 0$ 時遞增，且 $0 \le \tan^2\beta \le \mu^2$，所以

$$k^2 \le \frac{9\mu^2}{\mu^2+1},$$

此即所求。

第 (ii) 部分

現在 $T = 2mg$，而附加的質量為 m 的質點與 A 的水平距離為 $xh\sin 2\beta$。繩子的幾何關係不變。

對 A 取力矩：

$$2mg \cdot 2h\cos\beta = 3mg\,h\sin 2\beta + mg\,xh\sin 2\beta = 2mgh(3+x)\sin\beta\cos\beta,$$

兩邊除以 $2mgh\cos\beta \neq 0$，得

$$\sin\beta = \frac{2}{3+x}.$$

當 $0 \le x \le 2$ 時，此值介乎 $\frac{2}{5}$ 與 $\frac{2}{3}$ 之間，所以這樣的 β 存在。

分解各力：

$$N = 4mg - 2mg\sin\beta, \qquad F = 2mg\cos\beta,$$

所以

$$\frac{F^2}{N^2} = \frac{4\cos^2\beta}{(4-2\sin\beta)^2} = \frac{\cos^2\beta}{(2-\sin\beta)^2}.$$

代入 $\sin\beta = 2/(3+x)$：

$$\cos^2\beta = 1 - \frac{4}{(3+x)^2} = \frac{(3+x-2)(3+x+2)}{(3+x)^2} = \frac{(x+1)(x+5)}{(3+x)^2},$$

$$2-\sin\beta = \frac{2(3+x)-2}{3+x} = \frac{2(x+2)}{3+x}.$$

$(3+x)^2$ 的因子互相消去，剩下

$$\frac{F^2}{N^2} = \frac{(x+1)(x+5)}{4(x+2)^2} = \frac{x^2+6x+5}{4(x+2)^2},$$

此即所求結果。

想一想 怎樣把「無論 x 取何值」轉化為關於 μ 的條件？

對每個 x，我們都需要 $F \le \mu N$，即 $\mu \ge F/N$。要涵蓋所有 $x \in [0,2]$，μ 必須至少等於 F/N 在該區間上的最大值。因此我們要求 F^2/N^2 的最大值。

按照提示，

$$\frac{1}{3} - \frac{F^2}{N^2} = \frac{4(x+2)^2 - 3(x^2+6x+5)}{12(x+2)^2} = \frac{x^2-2x+1}{12(x+2)^2} = \frac{(x-1)^2}{12(x+2)^2} \ge 0,$$

等號當且僅當 $x = 1$ 時成立，而這個值在容許範圍之內。所以對所有 $x \in [0,2]$，$F^2/N^2 \le \frac{1}{3}$，且此界在 $x=1$ 時達到。因此 F/N 的最大值為 $1/\sqrt{3}$，而橫樑對每個 x 都能保持平衡，當且僅當 $\mu \ge 1/\sqrt{3}$。所求的最小值為

$$\boxed{\mu = \frac{1}{\sqrt{3}}}.$$

驗算

- 在第 (i) 部分，試考慮橫樑水平放置的情況，即 $2\beta = 90°$。此時 $B = (2h, 0)$，繩子 BC 與水平成 $45°$，它與 A 的距離為 $\sqrt{2}\,h$。取力矩得 $T\sqrt{2}\,h = 3mgh$，所以 $T = 3mg/\sqrt{2}$，與 $k = 3\sin 45°$ 吻合。此外 $N = F = \frac{3}{2}mg$，所以 $F/N = 1 = \tan 45°$。
- 在第 (ii) 部分取 $x = 0$，公式給出 $5/16$；直接計算則有 $\sin\beta = \frac{2}{3}$、$\cos^2\beta = \frac{5}{9}$、$(2 - \frac{2}{3})^2 = \frac{16}{9}$，同樣得到 $\frac{5}{16}$。
- 取 $x = 1$：$\sin\beta = \frac{1}{2}$，所以 $\beta = 30°$，橫樑與鉛垂線成 $60°$；$F/N = \cos 30°/(2 - \frac{1}{2}) = 1/\sqrt{3} \approx 0.5774$。以電腦對 x 在 $[0, 2]$ 範圍內的力矩及分解後的力進行驗算，確認了公式及這個最大值。

常見錯誤

- 忘記繩子是沿 BC 拉，而不是鉛垂地拉：滑輪在 C，所以張力有水平分量，而摩擦力要抵抗的正是這個分量。
- 取了 F/N 的最小值（或其在端點的值），而不是它在 $0 \le x \le 2$ 上的最大值。最壞情況出現在區間內部，即 $x = 1$ 處。
- 混淆力臂：重量的力臂是水平距離（$h\sin 2\beta$），而張力的力臂是到 BC 的垂直距離（$2h\cos\beta$）。

STEP 之外

取力矩與分解各力，正是剛體（rigid body）平衡條件的兩半：合力為零，以及合力矩（torque）為零。到了大學，這些條件會寫成向量形式 $\sum \mathbf{F} = \mathbf{0}$ 及 $\sum \mathbf{r} \times \mathbf{F} = \mathbf{0}$；而第 (ii) 部分那種「對參數取最壞情況」的推理，正好讓你初嘗工程師如何為安全餘量作設計。Kleppner 與 Kolenkow 合著的 *An Introduction to Mechanics*（《力學導論》）以這種向量語言，細緻地發展了靜力學（statics）與力矩的理論。

Beyond STEP 詳細解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hant/。解答文字採用 CC0 1.0；題目本身版權屬 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予轉載。由機器從英文翻譯而成；尚未經審閱。