詳細解答

STEP III 2023，第 1 題

純數學 • 圓錐曲線的切線

> **STEP III 2023，第 1 題**
>
> 繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 OCR 提供下載的 2023 年 STEP 試卷（zip 檔案）內的 STEP III 試卷：
>
> www.ocr.org.uk/Images/707102-2023-past-papers.zip

關鍵思路

一條直線與圓相切（tangent），當且僅當圓心到該直線的垂直距離等於半徑。因此，我們先用 p 和 q 寫出弦（chord）PQ 的方程，計算這個距離，然後看着相切條件化簡成題目所給的關係式。之後，一切都歸結為一條含兩個參數的對稱方程：最後一部分問的是，這個關係式對第三條邊是否仍然成立，而這正是根之和與根之積（sums and products of roots）的用武之地。

解答

第 (i) 部分

PQ 的斜率（gradient）是

$$\frac{aq^2 - ap^2}{2aq - 2ap} = \frac{p+q}{2},$$

由於兩點相異，可以除以 $q - p \neq 0$。因此經過 P 的直線是 $y - ap^2 = \frac{1}{2}(p+q)(x - 2ap)$，化簡後得

$$(p+q)x - 2y - 2apq = 0.$$

圓心 $C(0, 3a)$ 到這條直線的距離是

$$\frac{|-6a - 2apq|}{\sqrt{(p+q)^2 + 4}} = \frac{2a|pq+3|}{\sqrt{(p+q)^2+4}}.$$

這條直線與圓相切，當且僅當此距離等於 $2a$，即（由於兩邊皆為正，可以平方，再約去 $4a^2 \neq 0$）當且僅當

$$(pq+3)^2 = (p+q)^2 + 4 \iff p^2q^2 + 6pq + 5 = (p+q)^2.$$

這正是 $(*)$，所以當 $(*)$ 成立時，直線 PQ 是圓的切線。（每一步都是可逆的，所以逆命題（converse）亦成立，而我們在第 (iii) 部分會用到這一點。）

第 (ii) 部分

展開 $(*)$ 並按 q 的冪次整理：

$$(1-p^2)q^2 - 4pq + (p^2-5) = 0.$$

由於 $p^2 \neq 1$，首項係數不為零，所以這確實是一條關於 q 的二次方程。它的判別式（discriminant）是

$$\begin{aligned} 16p^2 - 4(1-p^2)(p^2-5) &= 16p^2 - 4(-p^4+6p^2-5) \\ &= 4(p^4-2p^2+5) \\ &= 4((p^2-1)^2+4) > 0, \end{aligned}$$

所以有兩個相異實根 q_1, q_2。兩者都不等於 p：把 $q=p$ 代入左邊得 $-p^4-2p^2-5<0$。所以 Q_1 和 Q_2 確實是與 P 相異的點。

由這條二次方程，

$$q_1+q_2 = \frac{4p}{1-p^2}, \qquad q_1q_2 = \frac{p^2-5}{1-p^2}.$$

第 (iii) 部分

取三角形 PQ_1Q_2，其中 $Q_i = (2aq_i, aq_i^2)$，而 q_1, q_2 是第 (ii) 部分中的兩個根。它的頂點全都在 $x^2 = 4ay$ 上，而且是三個相異點（如 (ii) 所證）；拋物線（parabola）上三個相異點必定不共線，因為一條直線與拋物線最多相交兩次。所以這確實是一個三角形。

由第 (i) 部分，由於 (p, q_1) 和 (p, q_2) 滿足 $(*)$，邊 PQ_1 和 PQ_2 都與圓相切。

> **想一想** 如果我們不想明確解出 q_1 和 q_2，怎樣才能證明第三條邊 Q_1Q_2 也是切線？

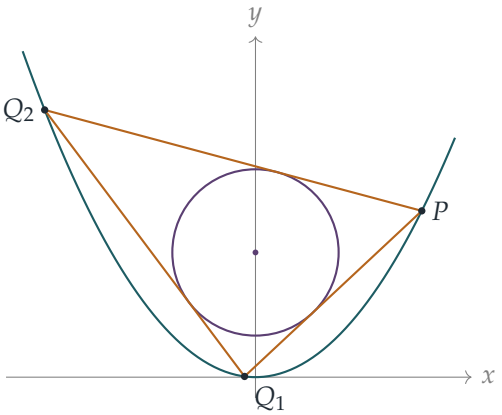
根據第 (i) 部分的可逆論證（把 p, q 換成 q_1, q_2），Q_1Q_2 是切線當且僅當

$$(q_1+q_2)^2 = q_1^2q_2^2 + 6q_1q_2 + 5,$$

而兩邊都只涉及 $s = q_1+q_2$ 和 $t = q_1q_2$，這兩者我們已經知道。全式乘以 $(1-p^2)^2$。左邊變成 $16p^2$。右邊變成

$$\begin{aligned} &(p^2-5)^2 + 6(p^2-5)(1-p^2) + 5(1-p^2)^2 \\ &\quad = (p^4-10p^2+25) + (-6p^4+36p^2-30) + (5p^4-10p^2+5) \\ &\quad = 16p^2. \end{aligned}$$

兩邊相等，所以 Q_1Q_2 也與圓相切，而 PQ_1Q_2 就是所求的三角形。



圖中顯示 $a=1$、$p=2$ 的情況，此時 $q_{1,2}=\frac{1}{3}(-4\pm\sqrt{13})$。

驗算

- 取 $a=1$、$p=2$：二次方程是 $3q^2+8q+1=0$，其中 $q_1+q_2=-\frac{8}{3}=\frac{4p}{1-p^2}$，$q_1q_2=\frac{1}{3}=\frac{p^2-5}{1-p^2}$。於是 $(q_1+q_2)^2=\frac{64}{9}$，而 $q_1^2q_2^2+6q_1q_2+5=\frac{1}{9}+2+5=\frac{64}{9}$，正如第 (iii) 部分所要求。
- 數值上，取 $q_1\approx-0.1315$、$q_2\approx-2.5352$，三條邊所在直線到 $(0,3)$ 的距離都是 2.000；用電腦對數以千計的隨機 a 和 p 作檢驗，結果吻合至約 10^{-13}。
- 被排除的情況 $p=\pm1$ 很有啟發性：當 $p=1$ 時，二次方程退化為 $-4q-4=0$，只得出 $q=-1$。從 $P(2a,a)$ 出發那條「失蹤」的切線是鉛垂線 $x=2a$，它與圓相切，但與拋物線只相交於 P。

常見錯誤

- 在距離公式中忘記絕對值，或者平方時沒有指出兩邊皆為正。
- 只用了第 (i) 部分的「若」方向：第 (iii) 部分需要逆命題，才能把 Q_1Q_2 的相切轉化為代數條件，所以要說明各步是可逆的。
- 沒有檢查 $q_1,q_2\neq p$，以確保三角形不是退化的。

STEP 之外

這是龐斯萊閉合定理（Poncelet's porism）的一個例子：如果一個三角形可以內接於一條圓錐曲線（conic），同時外切於另一條圓錐曲線，那麼這樣的三角形可以從第一條圓錐曲線上的任何一點出發作出。這裏的拋物線與圓正是這樣的一對，而第 (iii) 部分用韋達定理（Vieta's formulas）直接證明了閉合性。一般情況的證明要用到射影幾何（projective geometry），而最優雅的證明則用到橢圓曲線（elliptic curves）。Siklos 的 *Advanced Problems in Mathematics*（《數學高階難題》）收錄了更多這類參數化圓錐曲線幾何的題目。

Beyond STEP 詳細解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hant/。解答文字採用 CC0 1.0；題目本身版權屬 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予轉載。由機器從英文翻譯而成；尚未經審閱。