詳細解答

STEP II 2023，第 9 題

力學 • 斜坡上的連接質點

STEP II 2023，第 9 題

繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 OCR 提供下載的 2023 年 STEP 試卷（zip 檔案）內的 STEP II 試卷：

www.ocr.org.uk/Images/707102-2023-past-papers.zip

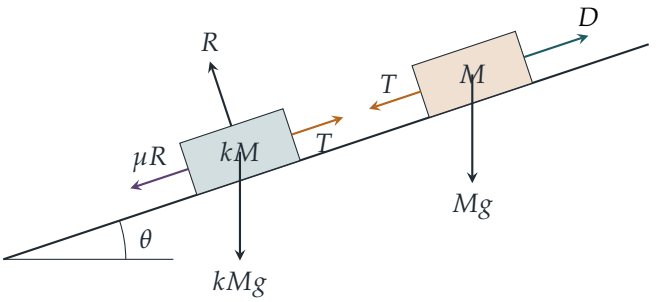
關鍵思路

在三種情況下，分別對貨車和拖車寫出牛頓（Newton）第二定律（Newton's second law）。下坡其實就是上一條傾角為 $-\alpha$ 的斜坡，所以一組方程就能涵蓋全部三種情況。單憑貨車的方程，幾乎就能直接得出 (i) 的關係式。至於 (ii)，整道題歸結為比較 $1-\cos\alpha$ 與 $\sin\alpha$ 的大小。

解答

我們把貨車和拖車視為質點（particle），兩者之間以一根沿運動方向放置的輕剛性桿連接。兩者都沿貨車的方向運動，所以拖車所受的摩擦力（friction）與運動方向相反，大小為 μR，其中 R 是拖車所受的法向反作用力（normal reaction）。張力（tension）T 把拖車向前拉，把貨車向後拉。（若 T 算出來是負數，就表示桿處於推力（thrust）狀態；代數運算不變。）

把斜坡的傾角記為 θ，規定 $\theta=\alpha$ 為上坡，$\theta=0$ 為平地，$\theta=-\alpha$ 為下坡。



設沿斜坡向上的加速度（acceleration）為 a。對每個物體沿斜坡方向分解力，並對拖車在垂直於斜坡的方向分解力（得 $R = kMg\cos\theta$），便有

$$\text{貨車：} \qquad D - T - Mg\sin\theta = Ma, \tag{1}$$

$$\text{拖車：} \qquad T - kMg\sin\theta - \mu kMg\cos\theta = kMa. \tag{2}$$

把 (1) 與 (2) 相加，消去 T：

$$a = \frac{D}{(1+k)M} - g\sin\theta - \frac{\mu kg\cos\theta}{1+k}.$$

代入 (1)，得 $T = D - Mg\sin\theta - Ma$，所以

$$T = D - \frac{D}{1+k} + \frac{\mu kMg\cos\theta}{1+k} = \frac{kD + \mu kMg\cos\theta}{1+k}.$$

含 $\sin\theta$ 的項互相抵消，因此張力只透過 $\cos\theta$ 與 θ 有關。

第 (i) 部分

由於 $\cos(-\alpha) = \cos\alpha$，$\theta = \alpha$ 與 $\theta = -\alpha$ 兩種情況的張力相同：

$$T_1 = T_3 = \frac{kD + \mu kMg\cos\alpha}{1+k}, \qquad T_2 = \frac{kD + \mu kMg}{1+k}.$$

要證明第二個結果，只需用到三種情況下的貨車方程 (1)：

$$\begin{aligned} Ma_1 &= D - T_1 - Mg\sin\alpha, \\ Ma_2 &= D - T_2, \\ Ma_3 &= D - T_3 + Mg\sin\alpha. \end{aligned}$$

把第一和第三條方程相加，並利用 $T_3 = T_1$，得 $M(a_1 + a_3) = 2D - 2T_1$。再減去中間方程的兩倍，

$$M(a_1 + a_3 - 2a_2) = (2D - 2T_1) - (2D - 2T_2) = 2(T_2 - T_1),$$

即為所求。

第 (ii)(a) 部分

第一個不等式。由 (i) 可知，$a_2 < \frac{1}{2}(a_1 + a_3)$ 等價於 $T_2 > T_1$（因為 $M > 0$）。由上面的公式，

$$T_2 - T_1 = \frac{\mu kMg\,(1 - \cos\alpha)}{1+k} > 0,$$

這是因為 $0 < \alpha < \frac{1}{2}\pi$ 給出 $\cos\alpha < 1$，而由於有摩擦力作用，$\mu > 0$。所以 $a_2 < \frac{1}{2}(a_1 + a_3)$。

第二個不等式。$\frac{1}{2}(a_1+a_3) < a_3$ 等價於 $a_1 < a_3$。從 a 的公式可見，對於 $\theta = \pm\alpha$，含 D 的項和摩擦力項都相同，所以

$$a_3 - a_1 = 2g\sin\alpha > 0.$$

（另一做法是把兩條貨車方程相減，並利用 $T_1 = T_3$，得 $M(a_3 - a_1) = 2Mg\sin\alpha$。）因此

$$a_2 < \tfrac{1}{2}(a_1+a_3) < a_3.$$

第 (ii)(b) 部分

在 a 的公式中分別取 $\theta = 0$ 和 $\theta = \alpha$，

$$a_2 - a_1 = g\sin\alpha - \frac{\mu k g\,(1-\cos\alpha)}{1+k} = g\left[\sin\alpha - \frac{\mu k}{1+k}(1-\cos\alpha)\right].$$

想一想 上坡會損失 $g\sin\alpha$ 的加速度，但法向反作用力減小，又會省下一些摩擦力。哪一個效應較大？

省下的摩擦力是較小的一方。首先，$\dfrac{k}{1+k} < 1$ 且 $\mu < 1$，所以 $0 \le \dfrac{\mu k}{1+k} < 1$。其次，利用半角公式（half-angle formulae），

$$1-\cos\alpha = 2\sin^2\tfrac{1}{2}\alpha, \qquad \sin\alpha = 2\sin\tfrac{1}{2}\alpha\cos\tfrac{1}{2}\alpha,$$

所以 $\dfrac{1-\cos\alpha}{\sin\alpha} = \tan\tfrac{1}{2}\alpha < 1$，因為 $0 < \frac{1}{2}\alpha < \frac{1}{4}\pi$。因此

$$\frac{\mu k}{1+k}(1-\cos\alpha) < 1-\cos\alpha < \sin\alpha,$$

其中第一個不等號是嚴格的，因為 $1-\cos\alpha > 0$。所以 $a_2 - a_1 > 0$，即 $a_1 < a_2$。條件 $\mu < 1$ 正是在這裏用上的。若拖車非常重、μ 很大而斜坡又很陡，省下的摩擦力就可能超過 $g\sin\alpha$。

驗算

- 取 $M = 1000\,\text{kg}$、$k = 0.5$、$\mu = 0.4$、$\alpha = 30°$、$D = 5000\,\text{N}$ 及 $g = 9.8\,\text{m s}^{-2}$。那麼 $a_1 \approx -2.698$、$a_2 \approx 2.027$、$a_3 \approx 7.102\,\text{m s}^{-2}$，而 $T_1 = T_3 \approx 2798\,\text{N}$、$T_2 \approx 2973\,\text{N}$。可見 $\frac{1}{2}(a_1+a_3) \approx 2.202$ 確實嚴格介乎 a_2 與 a_3 之間，而且 $a_1 < a_2$。用電腦對大量 $\mu < 1$ 的隨機參數組合進行檢驗，所有恆等式和不等式均成立。
- 若 $\mu = 0$，則在任何斜坡上張力都是 $kD/(1+k)$，而 a_2 恰好是 a_1 與 a_3 的平均值。這就是 (ii)(a) 需要有摩擦力的原因。
- 取 $\mu = 3$、$k = 100$ 及 $\alpha = 1.5$ 弧度，則 $a_1 > a_2$，所以 (b) 中的條件 $\mu < 1$ 確實不可缺少。

常見錯誤

- 在斜坡上把摩擦力寫成 μkMg。斜坡上的法向反作用力是 $kMg\cos\alpha$，而第 (ii) 部分的全部內容正是建基於這個差別。
- 下坡時把重力分量的正負號弄錯。把一切用 θ 表示，再令 $\theta = -\alpha$，就可避免這個錯誤。
- 在 (ii)(b) 中只論證 $\mu k/(1+k) < 1$，卻沒有比較 $1-\cos\alpha$ 與 $\sin\alpha$。兩個事實缺一不可。

STEP 之外

把一個系統拆分成若干物體，對每個物體應用牛頓定律，而內力則以大小相等、方向相反的形式成對出現——這是剛體（rigid body）力學和多質點力學的基本方法。把各方程相加，便得到質心（centre of mass）的運動，而內力則會消去。不等式 $1-\cos\alpha < \sin\alpha$ 也是一個利用半角恆等式比較函數（function）大小的小例子，這種技巧在整個分析學（analysis）中都很有用。Kleppner 與 Kolenkow 所著的 *An Introduction to Mechanics*（《力學導論》）對這些概念有細緻的闡述。

Beyond STEP 詳細解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hant/。解答文字採用 CC0 1.0；題目本身版權屬 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予轉載。由機器從英文翻譯而成；尚未經審閱。