詳細解答

STEP II 2023，第 8 題

純數學 • 三維向量

> **STEP II 2023，第 8 題**
>
> 繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 OCR 提供下載的 2023 年 STEP 試卷（zip 檔案）內的 STEP II 試卷：
>
> www.ocr.org.uk/Images/707102-2023-past-papers.zip

關鍵思路

先為三對對棱命名，第 (i) 部分就化為三條線性方程。之後的一切，都來自把每個長度條件轉化為點積（dot product），所用的是 $|\mathbf{u}-\mathbf{v}|^2 = |\mathbf{u}|^2 + |\mathbf{v}|^2 - 2\,\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}$。一旦三個點積 $\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}$、$\mathbf{b}\cdot\mathbf{c}$、$\mathbf{c}\cdot\mathbf{a}$ 都以 $|\mathbf{a}|^2$、$|\mathbf{b}|^2$ 和 $|\mathbf{c}|^2$ 表示出來，第 (iii) 和 (iv) 部分就只是展開括號而已。

解答

第 (i) 部分

將四面體（tetrahedron）記為 $OABC$。它的六條棱（edge）組成三對沒有公共頂點的棱：

$$OA \text{ 和} BC, \qquad OB \text{ 和} CA, \qquad OC \text{ 和} AB.$$

設 $OA = p$、$BC = p'$、$OB = q$、$CA = q'$、$OC = r$、$AB = r'$。四個面的周界（perimeter）分別為

$$OAB : p+q+r', \qquad OAC : p+r+q',$$
$$OBC : q+r+p', \qquad ABC : p'+q'+r'.$$

若四面體是等腰四面體（*isosceles tetrahedron*），則 $p = p'$、$q = q'$、$r = r'$，而四個周界都等於 $p+q+r$。

反過來，假設四個周界全部相等。設 $X = p - p'$、$Y = q - q'$、$Z = r - r'$。把前三個面

分別與 ABC 比較：

$$(p+q+r')-(p'+q'+r')=X+Y=0,$$
$$(p+r+q')-(p'+q'+r')=X+Z=0,$$
$$(q+r+p')-(p'+q'+r')=Y+Z=0.$$

三式相加得 $2(X+Y+Z)=0$。再以 $X+Y+Z=0$ 依次減去每一條方程，得 $Z=0$、$Y=0$ 及 $X=0$。所以 $p=p'$、$q=q'$ 及 $r=r'$：四面體是等腰的。這就證明了兩個方向。

第 (ii) 部分

由於 $\overrightarrow{BC}=\mathbf{c}-\mathbf{b}$，條件 $OA=BC$ 即是

$$|\mathbf{a}|^2=|\mathbf{c}-\mathbf{b}|^2=|\mathbf{b}|^2+|\mathbf{c}|^2-2\,\mathbf{b}\cdot\mathbf{c},$$

移項後得 $2\,\mathbf{b}\cdot\mathbf{c}=|\mathbf{b}|^2+|\mathbf{c}|^2-|\mathbf{a}|^2$，正是所求。

對另外兩對對棱（$OB=CA$ 及 $OC=AB$）作同樣的論證，得

$$2\,\mathbf{a}\cdot\mathbf{c}=|\mathbf{a}|^2+|\mathbf{c}|^2-|\mathbf{b}|^2,\qquad 2\,\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}=|\mathbf{a}|^2+|\mathbf{b}|^2-|\mathbf{c}|^2.$$

把這兩式相加，$|\mathbf{b}|^2$ 和 $|\mathbf{c}|^2$ 項互相抵消：

$$2\,\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}+2\,\mathbf{a}\cdot\mathbf{c}=2|\mathbf{a}|^2,\quad \text{所以}\quad \mathbf{a}\cdot(\mathbf{b}+\mathbf{c})=|\mathbf{a}|^2.$$

這三條點積公式對 $\mathbf{a}$、$\mathbf{b}$、$\mathbf{c}$ 是對稱的，因此同理可得

$$\mathbf{b}\cdot(\mathbf{c}+\mathbf{a})=|\mathbf{b}|^2,\qquad \mathbf{c}\cdot(\mathbf{a}+\mathbf{b})=|\mathbf{c}|^2.$$

第 (iii) 部分

設 $S=|\mathbf{a}|^2+|\mathbf{b}|^2+|\mathbf{c}|^2$。把第 (ii) 部分中 $2\,\mathbf{b}\cdot\mathbf{c}$、$2\,\mathbf{c}\cdot\mathbf{a}$ 和 $2\,\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}$ 的三條公式相加，每個長度的平方都以正號出現兩次、以負號出現一次，所以

$$2(\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}+\mathbf{b}\cdot\mathbf{c}+\mathbf{c}\cdot\mathbf{a})=S.$$

與 O 的距離。

$$OG^2=\tfrac{1}{16}|\mathbf{a}+\mathbf{b}+\mathbf{c}|^2=\tfrac{1}{16}(S+2(\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}+\mathbf{b}\cdot\mathbf{c}+\mathbf{c}\cdot\mathbf{a}))=\tfrac{1}{16}(2S)=\tfrac{1}{8}S.$$

與 A 的距離。這裏 $\overrightarrow{AG}=\tfrac{1}{4}(\mathbf{b}+\mathbf{c}-3\mathbf{a})$，而

$$\begin{aligned}|\mathbf{b}+\mathbf{c}-3\mathbf{a}|^2&=|\mathbf{b}+\mathbf{c}|^2-6\,\mathbf{a}\cdot(\mathbf{b}+\mathbf{c})+9|\mathbf{a}|^2\\&=|\mathbf{b}|^2+|\mathbf{c}|^2+2\,\mathbf{b}\cdot\mathbf{c}-6|\mathbf{a}|^2+9|\mathbf{a}|^2\qquad\text{利用}\mathbf{a}\cdot(\mathbf{b}+\mathbf{c})=|\mathbf{a}|^2\\&=|\mathbf{b}|^2+|\mathbf{c}|^2+(|\mathbf{b}|^2+|\mathbf{c}|^2-|\mathbf{a}|^2)+3|\mathbf{a}|^2\\&=2S.\end{aligned}$$

所以同樣有 $AG^2 = \frac{1}{16}(2S) = \frac{1}{8}S$。

與 B 和 C 的距離。我們用過的每一個關於 $\mathbf{a}$ 的事實，對 $\mathbf{b}$ 和 $\mathbf{c}$ 同樣成立（見第 (ii) 部分末段），而 S 是對稱的。因此完全相同的計算給出 $BG^2 = CG^2 = \frac{1}{8}S$。

故此 G 與四個頂點的距離都是 $\sqrt{S/8}$。

第 (iv) 部分

展開題目提示的向量：

$$\begin{aligned}|\mathbf{a}-\mathbf{b}-\mathbf{c}|^2 &= S - 2\,\mathbf{a}\cdot\mathbf{b} - 2\,\mathbf{a}\cdot\mathbf{c} + 2\,\mathbf{b}\cdot\mathbf{c}\\ &= S - 2|\mathbf{a}|^2 + 2\,\mathbf{b}\cdot\mathbf{c} && \text{由第 (ii) 部分}\\ &= (|\mathbf{b}|^2 + |\mathbf{c}|^2 - |\mathbf{a}|^2) + 2\,\mathbf{b}\cdot\mathbf{c} = 4\,\mathbf{b}\cdot\mathbf{c}.\end{aligned}$$

所以

$$\mathbf{b}\cdot\mathbf{c} = \tfrac{1}{4}|\mathbf{a}-\mathbf{b}-\mathbf{c}|^2 \geq 0,$$

因此角 BOC 不是鈍角（obtuse angle）。

> ? **想一想** 這只是十二個角之中的一個。怎樣才能不必重複計算，就得到其餘所有的角？

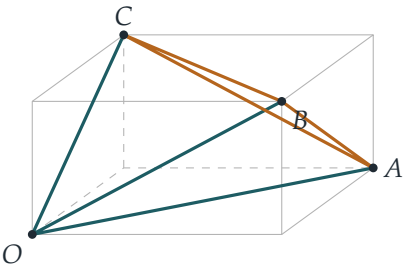
以 $\mathbf{b}-\mathbf{c}-\mathbf{a}$ 和 $\mathbf{c}-\mathbf{a}-\mathbf{b}$ 作同樣的計算，得 $\mathbf{c}\cdot\mathbf{a} \geq 0$ 及 $\mathbf{a}\cdot\mathbf{b} \geq 0$，所以 O 處沒有鈍角。「等腰」是四面體本身的性質，與我們怎樣標記頂點無關，所以任何一個頂點都可以叫作 O。因此同一論證在 A、B 和 C 處同樣適用。（另一做法：每個面的三邊都是 p、q、r，所以四個面是全等（congruent）三角形，而它們的角正好就是 O 處的三個角 BOC、COA、AOB。）故此在任何一個頂點處相交的兩條棱之間的角都不是鈍角。

會不會是直角？等號 $\mathbf{b}\cdot\mathbf{c} = 0$ 只在 $|\mathbf{a}-\mathbf{b}-\mathbf{c}| = 0$ 時成立，即 $\mathbf{a} = \mathbf{b}+\mathbf{c}$。但這樣 A 便位於經過 O、B、C 的平面上（事實上 $OBAC$ 是長方形），$OABC$ 是平的，並不是四面體。每個角的情況都一樣，所以**沒有任何角可以是直角**：在真正的等腰四面體中，每個面角都是銳角（acute angle）。

驗算

- 一個具體例子：取邊長為 x, y, z 的長方體（cuboid），選出它的四個頂點，使其中任何兩個都不由長方體的棱相連，例如 $O = (0,0,0)$、$A = (x,y,0)$、$B = (x,0,z)$、$C = (0,y,z)$。對棱是相對兩個面的對角線，所以彼此相等。取 $x = 1$、$y = 2$、$z = 3$，得 $\mathbf{b}\cdot\mathbf{c} = 9$ 及 $\mathbf{a}-\mathbf{b}-\mathbf{c} = (0,0,-6)$，而確實 $\frac{1}{4}\cdot 36 = 9$。此外 $G = (\frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2})$ 是長方體的中心，與每個頂點的距離都是 $\sqrt{14}/2$，與 $\sqrt{S/8}$（其中 $S = 5+10+13 = 28$）吻合。

- 平面的情況：$\mathbf{b} = (3,0,0)$、$\mathbf{c} = (0,4,0)$、$\mathbf{a} = (3,4,0)$ 給出一個長方形，它的對「棱」（邊和對角線）相等，而且有直角。這正是我們排除了的退化情況。
- 這些恆等式亦已用電腦在數千個隨機的長方體例子上驗證過。



常見錯誤

- 在第 (i) 部分只證明了一個方向。「當且僅當」（if and only if）需要兩個方向，而有實質內容的是逆命題那一部分。
- 在第 (iv) 部分沒有妥善排除直角。$\mathbf{b}\cdot\mathbf{c} = 0$ 迫使 $\mathbf{a} = \mathbf{b} + \mathbf{c}$，令四點共面（coplanar）。
- 只檢查了 O 處的角便停下來。要說明為甚麼其餘三個頂點也有同樣結論。

STEP 之外

上面的長方體圖已道出全部真相：每個等腰四面體（又稱雙楔體（disphenoid））都可以從長方體選取相間的頂點得到。這樣，第 (iii) 部分是說形心（centroid）就是長方體的中心，而第 (iv) 部分是說長方體的邊長是正數。把長度條件轉化為點積，進而轉化為由內積（inner product）組成的格拉姆矩陣（Gram matrix），是大學一年級線性代數（linear algebra）和幾何的標準工具。Strang 的 *Introduction to Linear Algebra*（《線性代數導論》）是了解這套方法如何發展的好去處。

Beyond STEP 詳細解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hant/。解答文字採用 CC0 1.0；題目本身版權屬 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予轉載。由機器從英文翻譯而成；尚未經審閱。