詳細解答

STEP II 2023，第 7 題

純數學 • 兩個平方數之和

STEP II 2023，第 7 題

繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 OCR 提供下載的 2023 年 STEP 試卷（zip 檔案）內的 STEP II 試卷：

www.ocr.org.uk/Images/707102-2023-past-papers.zip

本題在 *Beyond STEP* 第 1.6 節兩個平方數之和中有完整的引導式講解：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hant/ch01/two-squares.html

關鍵思路

兩個平方數之和（sum of two squares）x^2+y^2 正是 $|x+y\mathrm{i}|^2$。這樣一來，第 (i) 部分說的就是：兩個「兩平方數之和」的乘積仍然是兩個平方數之和，而把對應的複數（complex number）相乘，就能知道是哪兩個平方數。之後每一部分的做法都一樣：把每個因數寫成兩個平方數之和（通常是找出一個相近的完全平方數），然後相乘。最後一部分則反其道而行，以除法代替乘法。

解答

第 (i) 部分

我們有 $zw=(a+b\mathrm{i})(c+d\mathrm{i})=(ac-bd)+(ad+bc)\mathrm{i}$，所以

$$\begin{aligned}|zw|^2&=(ac-bd)^2+(ad+bc)^2\\&=a^2c^2-2abcd+b^2d^2+a^2d^2+2abcd+b^2c^2\\&=a^2c^2+a^2d^2+b^2c^2+b^2d^2\\&=(a^2+b^2)(c^2+d^2)=|z|^2|w|^2.\end{aligned}$$

由於 $|zw|$ 和 $|z||w|$ 都是非負數，取平方根便得 $|zw|=|z||w|$，證畢。

以下我們會使用平方形式：若 z 和 w 的實部和虛部都是整數，則

$$|z|^2\,|w|^2 = |zw|^2 = (\operatorname{Re} zw)^2 + (\operatorname{Im} zw)^2.$$

第 (ii) 部分

這裏 $|2+\mathrm{i}|^2 = 4+1 = 5$，而 $|10+11\mathrm{i}|^2 = 100+121 = 221$。兩者的乘積是

$$(2+\mathrm{i})(10+11\mathrm{i}) = 20+22\mathrm{i}+10\mathrm{i}-11 = 9+32\mathrm{i},$$

所以由第 (i) 部分，$9^2+32^2 = 5\times 221$。(的確，$81+1024 = 1105$。) 因此 $h=9$、$k=32$ 符合要求。

若改用 $10-11\mathrm{i}$（它的模（modulus）相同），則得 $(2+\mathrm{i})(10-11\mathrm{i}) = 31-12\mathrm{i}$，所以 $h=31$、$k=12$ 也符合要求。

第 (iii) 部分

這個數的末位是 5，所以 $8045 = 5\times 1609$，而如前所述 $5 = |2+\mathrm{i}|^2$。現在需要把 1609 寫成兩個平方數之和。它略大於 $40^2 = 1600$，而 $1609-1600 = 9 = 3^2$，所以 $1609 = |40+3\mathrm{i}|^2$。於是

$$(2+\mathrm{i})(40+3\mathrm{i}) = 80+6\mathrm{i}+40\mathrm{i}-3 = 77+46\mathrm{i},$$

由第 (i) 部分得

$$77^2+46^2 = 5\times 1609 = 8045.$$

所以 $m=77$、$n=46$。(若改用 $3+40\mathrm{i}$，則得 $-34+83\mathrm{i}$，所以 $34^2+83^2 = 8045$ 亦成立。)

第 (iv) 部分

這裏多出的因數是 $36 = 6^2 = |6|^2$，即實數 6 的模的平方。把 $102+201\mathrm{i}$ 乘以 6，只是把實部和虛部同時放大：

$$(6\times 102)^2+(6\times 201)^2 = 36\,(102^2+201^2) = 36\times 50805.$$

所以 $p=612$、$q=1206$。

第 (v) 部分

思路是找出兩種不同的方法，用高斯整數把 25 寫成 $|\alpha|^2$，再把每一個都乘以 1002082 的同一個固定表示式。

首先，1002082 略大於 $1001^2 = 1002001$，而

$$1002082 - 1002001 = 81 = 9^2,$$

所以 $1002082 = 1001^2 + 9^2 = |1001 + 9\mathrm{i}|^2$。

其次，$25 = |5|^2 = |3 + 4\mathrm{i}|^2 = |3 - 4\mathrm{i}|^2$。把它們各自乘以 $1001 + 9\mathrm{i}$，每個都給出一對數：

$$\begin{aligned} 5(1001 + 9\mathrm{i}) &= 5005 + 45\mathrm{i}, \\ (3 + 4\mathrm{i})(1001 + 9\mathrm{i}) &= 3003 + 27\mathrm{i} + 4004\mathrm{i} - 36 = 2967 + 4031\mathrm{i}, \\ (3 - 4\mathrm{i})(1001 + 9\mathrm{i}) &= 3003 + 27\mathrm{i} - 4004\mathrm{i} + 36 = 3039 - 3977\mathrm{i}. \end{aligned}$$

由第 (i) 部分，每一個的模的平方都是 25×1002082。把實部和虛部取絕對值，並把較小的放在前面，便得到三組不同且滿足 $r < s$ 的數對：

$$(r, s) = (45, 5005), \qquad (2967, 4031), \qquad (3039, 3977).$$

想一想 為甚麼不同時使用 $4 + 3\mathrm{i}$，得出第四組數對？

因為 $4 + 3\mathrm{i} = \mathrm{i}(3 - 4\mathrm{i})$，而乘以 i 只會把實部和虛部互換（不計正負號）。它重現的是 $(3039, 3977)$，只是次序倒轉，所以並沒有給出新的結果。真正不同的選擇是 5、$3 + 4\mathrm{i}$ 和 $3 - 4\mathrm{i}$。

第 (vi) 部分

現在我們把方法倒過來用。同樣先找一個相近的平方數：$1002037 - 1002001 = 36 = 6^2$，所以

$$1002037 = 1001^2 + 6^2 = |1001 + 6\mathrm{i}|^2,$$

而且 $109 = 10^2 + 3^2 = |10 + 3\mathrm{i}|^2$。如果我們能把 $1001 + 6\mathrm{i} = (10 + 3\mathrm{i})(t + u\mathrm{i})$ 中的 t、u 取為整數，那麼由第 (i) 部分得

$$1002037 = 109\,(t^2 + u^2),$$

再除以 109（利用 $109 \times 9193 = 1002037$）便得 $t^2 + u^2 = 9193$。

於是我們做除法，分子和分母同乘以共軛（conjugate）$10 - 3\mathrm{i}$：

$$\begin{aligned} \frac{1001 + 6\mathrm{i}}{10 + 3\mathrm{i}} &= \frac{(1001 + 6\mathrm{i})(10 - 3\mathrm{i})}{109} = \frac{10010 - 3003\mathrm{i} + 60\mathrm{i} + 18}{109} \\ &= \frac{10028 - 2943\mathrm{i}}{109} = 92 - 27\mathrm{i}, \end{aligned}$$

因為 $109 \times 92 = 10028$ 及 $109 \times 27 = 2943$。這個除法剛好整除，所以 $1001 + 6\mathrm{i} = (10 + 3\mathrm{i})(92 - 27\mathrm{i})$，因此

$$92^2 + 27^2 = 9193.$$

所以 $t = 92$、$u = 27$。驗算一下：$8464 + 729 = 9193$。

? 想一想 如果除法不能整除，那怎麼辦？

那就試另一個共軛。改為除以 $10 - 3\mathrm{i}$，得到 $(9992 + 3063\mathrm{i})/109$，這並不是高斯整數（9992 不是 109 的倍數）。由於 109 是質數（prime），兩個選擇之中必有一個可行；這正是下文「STEP 之外」一節提到的高斯整數性質。至於拿 $1001 - 6\mathrm{i}$ 來除，並不會得到新結果，只會得到上述結果的共軛。

驗算

每個答案都可以直接用算術驗證：$9^2 + 32^2 = 1105 = 5 \times 221$；$77^2 + 46^2 = 5929 + 2116 = 8045$；$612^2 + 1206^2 = 1828980 = 36 \times 50805$；對於 (v)，$45^2 + 5005^2$、$2967^2 + 4031^2$ 和 $3039^2 + 3977^2$ 都等於 25052050；以及 $92^2 + 27^2 = 9193$。用電腦搜尋可以證實這些結果，並發現 25×1002082 其實有六個滿足 $0 < r < s$ 的表示式（另外三個是 $(721, 4953)$、$(2079, 4553)$ 和 $(2395, 4395)$）。它們來自 1002082 本身的另一個表示式，所以任何三組不同的數對都可接受。同樣地，$9193 = 48^2 + 83^2$ 亦成立。

常見錯誤

- 在 (v) 中，以為 $(3 + 4\mathrm{i})$ 和 $(4 + 3\mathrm{i})$ 會給出不同的數對：其實它們給出的是同一對數，只是次序相反。
- 在 (vi) 中，除以錯誤的共軛而得到非整數，然後就放棄。應該試試另一個。
- 展開乘積時，在 $\mathrm{i}^2 = -1$ 上弄錯正負號：最後務必直接驗算平方和。

STEP 之外

所有 a, b 為整數的數 $a + b\mathrm{i}$ 組成高斯整數（Gaussian integers），這是一個環（ring）；與普通整數一樣，在其中分解為質數的方式是唯一的。若普通質數 $p \equiv 1 \pmod 4$，則它可分裂為 $(x + y\mathrm{i})(x - y\mathrm{i})$，這就是費馬（Fermat）的二平方和定理（two-squares theorem）。計算把這些因數分配的方法有多少種，便能準確解釋一個數有多少個表示式，以及為何 1002082 的表示式不止我們用過的那一個。Davenport 的 *The Higher Arithmetic*（《高等算術》）對兩個平方數之和有精彩的論述；Allenby 的 *Rings, Fields and Groups*（《環、域與

輩》）則把高斯整數作為一個環來討論。

Beyond STEP 詳細解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hant/。解答文字採用 CC0 1.0；題目本身版權屬 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予轉載。由機器從英文翻譯而成；尚未經審閱。