詳細解答

STEP II 2023，第 6 題

純數學 • 斐波那契矩陣恆等式

> **STEP II 2023，第 6 題**
>
> 繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 OCR 提供下載的 2023 年 STEP 試卷（zip 檔案）內的 STEP II 試卷：
>
> www.ocr.org.uk/Images/707102-2023-past-papers.zip

關鍵思路

只要把斐波那契數（Fibonacci numbers）看成同一個 2×2 矩陣（matrix）各次冪的元素，關於它們的每一條恆等式（identity）就變成關於 $\mathbf{Q}$ 的冪的恆等式，而普通的代數運算（指數律（index laws）、行列式（determinant）、二項式定理（binomial theorem））便能完成所有工作。每一部分都依循同一個方法：找出同一個矩陣的兩種寫法，然後讀出其中一個元素。幾乎每次都是右上角的元素，而它正是 F_n 本身。

解答

矩陣公式

當 $n = 1$ 時，左邊是 $\begin{pmatrix} F_2 & F_1 \\ F_1 & F_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \mathbf{Q}$，因為 $F_2 = F_1 + F_0 = 1$。所以結果在 $n = 1$ 時成立。

假設結果對某個 $n \geq 1$ 成立。那麼

$$\mathbf{Q}^{n+1} = \mathbf{Q}^n\mathbf{Q} = \begin{pmatrix} F_{n+1} & F_n \\ F_n & F_{n-1} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F_{n+1} + F_n & F_{n+1} \\ F_n + F_{n-1} & F_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F_{n+2} & F_{n+1} \\ F_{n+1} & F_n \end{pmatrix},$$

這裏用了兩次遞推關係（recurrence）。這正是把公式中的 n 換成 $n + 1$ 的結果，所以由歸納法（induction），公式對所有正整數 n 成立。

第 (i) 部分

行列式具有乘法性，所以 $\det(\mathbf{Q}^n) = (\det \mathbf{Q})^n = (0-1)^n = (-1)^n$。從元素直接計算同一個行列式，

$$\det(\mathbf{Q}^n) = F_{n+1}F_{n-1} - F_n^2,$$

因此 $F_{n+1}F_{n-1} - F_n^2 = (-1)^n$，得證。（這就是卡西尼恆等式（Cassini's identity）。）

第 (ii) 部分

由指數律，$\mathbf{Q}^{m+n} = \mathbf{Q}^m\mathbf{Q}^n$：

$$\begin{pmatrix} F_{m+n+1} & F_{m+n} \\ F_{m+n} & F_{m+n-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F_{m+1} & F_m \\ F_m & F_{m-1} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} F_{n+1} & F_n \\ F_n & F_{n-1} \end{pmatrix}.$$

乘積的右上角元素是 $\mathbf{Q}^m$ 的第一行乘以 $\mathbf{Q}^n$ 的第二列，即 $F_{m+1}F_n + F_mF_{n-1}$。比較右上角元素，得

$$F_{m+n} = F_{m+1}F_n + F_mF_{n-1}.$$

第 (iii) 部分

直接計算，

$$\mathbf{Q}^2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \mathbf{I} + \mathbf{Q}.$$

（這是 $x^2 = 1 + x$ 的矩陣版本，而這條方程正是黃金比例（golden ratio）所滿足的方程。）

在以下各部分中，注意對每個 $k \geq 1$，$\mathbf{Q}^k$ 的右上角元素都是 F_k；對 $k = 0$ 亦然，因為 $\mathbf{Q}^0 = \mathbf{I}$ 的右上角元素是 $0 = F_0$。取矩陣之和的右上角元素是線性（linear）運算，所以 $\sum c_k\mathbf{Q}^k$ 的右上角元素是 $\sum c_kF_k$。

(a) 利用 $\mathbf{Q}^2 = \mathbf{I} + \mathbf{Q}$ 及取 $\mathbf{A} = \mathbf{Q}$ 的二項式定理，

$$\mathbf{Q}^{2n} = (\mathbf{Q}^2)^n = (\mathbf{I} + \mathbf{Q})^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}\mathbf{Q}^k.$$

左邊的右上角元素是 F_{2n}，右邊的則是 $\sum_k \binom{n}{k}F_k$。因此 $F_{2n} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}F_k$。

(b) 先用同樣的方法求 $\mathbf{Q}^3$：

$$\mathbf{Q}^3 = \mathbf{Q}\,\mathbf{Q}^2 = \mathbf{Q}(\mathbf{I} + \mathbf{Q}) = \mathbf{Q} + \mathbf{Q}^2 = \mathbf{Q} + \mathbf{I} + \mathbf{Q} = \mathbf{I} + 2\mathbf{Q}.$$

然後應用取 $\mathbf{A} = 2\mathbf{Q}$ 的二項式定理：

$$\mathbf{Q}^{3n} = (\mathbf{I} + 2\mathbf{Q})^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}2^k\mathbf{Q}^k,$$

比較右上角元素，得 $F_{3n} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} 2^k F_k$。

至於第二條恆等式，寫成 $\mathbf{Q}^{3n} = \mathbf{Q}^n \mathbf{Q}^{2n}$，並利用 (a) 的展開式：

$$\mathbf{Q}^{3n} = \mathbf{Q}^n \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \mathbf{Q}^k = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \mathbf{Q}^{n+k}.$$

$\mathbf{Q}^{n+k}$ 的右上角元素是 F_{n+k}，所以 $F_{3n} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} F_{n+k}$。

(c)

? **想一想** 應該把哪個矩陣自乘 n 次，才能產生符號 $(-1)^{n+k}$？

展開 $(\mathbf{Q} - \mathbf{I})^n$ 時，就會出現符號 $(-1)^{n+k} = (-1)^{n-k}$。為了配合我們可以使用的二項式定理的形式，寫成 $\mathbf{Q} - \mathbf{I} = -(\mathbf{I} + (-\mathbf{Q}))$，於是

$$(\mathbf{Q} - \mathbf{I})^n = (-1)^n (\mathbf{I} + (-\mathbf{Q}))^n = (-1)^n \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (-1)^k \mathbf{Q}^k = \sum_{k=0}^{n} (-1)^{n+k} \binom{n}{k} \mathbf{Q}^k.$$

兩邊乘以 $\mathbf{Q}^n$，

$$\sum_{k=0}^{n} (-1)^{n+k} \binom{n}{k} \mathbf{Q}^{n+k} = \mathbf{Q}^n (\mathbf{Q} - \mathbf{I})^n = (\mathbf{Q}(\mathbf{Q} - \mathbf{I}))^n,$$

最後一步之所以成立，是因為 $\mathbf{Q}$ 與 $\mathbf{Q} - \mathbf{I}$ 可交換（commute）（兩者都是 $\mathbf{Q}$ 的多項式（polynomial）），所以各因子可以重新組合。但由 (iii)，$\mathbf{Q}(\mathbf{Q} - \mathbf{I}) = \mathbf{Q}^2 - \mathbf{Q} = \mathbf{I}$，所以整個和等於 $\mathbf{I}^n = \mathbf{I}$。

$\mathbf{I}$ 的右上角元素是 0，而左邊的右上角元素是 $\sum_k (-1)^{n+k} \binom{n}{k} F_{n+k}$。因此

$$\sum_{k=0}^{n} (-1)^{n+k} \binom{n}{k} F_{n+k} = 0.$$

額外收穫：比較左上角元素，得 $\sum_k (-1)^{n+k} \binom{n}{k} F_{n+k+1} = 1$。

驗算

- (i)，取 $n = 5$：$F_6 F_4 - F_5^2 = 8 \cdot 3 - 25 = -1 = (-1)^5$。
- (ii)，取 $m = 3$、$n = 4$：$F_4 F_4 + F_3 F_3 = 9 + 4 = 13 = F_7$。
- (a)，取 $n = 4$：$0 + 4 \cdot 1 + 6 \cdot 1 + 4 \cdot 2 + 1 \cdot 3 = 21 = F_8$。
- (b)，取 $n = 3$：$3 \cdot 2 \cdot 1 + 3 \cdot 4 \cdot 1 + 8 \cdot 2 = 34 = F_9$，另外 $F_3 + 3F_4 + 3F_5 + F_6 = 2 + 9 + 15 + 8 = 34$。
- (c)，取 $n = 3$：$-F_3 + 3F_4 - 3F_5 + F_6 = -2 + 9 - 15 + 8 = 0$。

這五條恆等式亦已用電腦驗證，對所有不超過 59 的 n 都成立（在 (ii) 中則對所有不超過 49 的 m, n 成立）。

常見錯誤

- 在 (ii) 中比較錯了元素，或者把行乘以行，會得到一條看似合理但錯誤的公式。$\mathbf{Q}^m\mathbf{Q}^n$ 的右上角元素用的是 $\mathbf{Q}^m$ 的第一行和 $\mathbf{Q}^n$ 的第二列。
- 對不可交換的矩陣使用 $(\mathbf{A}+\mathbf{B})^n$ 的二項式定理。這裏每個矩陣都是 $\mathbf{Q}$ 的多項式，所以全部都可交換，但這一點值得明確指出。
- 遺漏 $k=0$ 的項：它貢獻 $\mathbf{I}$，其右上角元素是 $F_0=0$。

STEP 之外

關係式 $\mathbf{Q}^2=\mathbf{I}+\mathbf{Q}$ 就是 $\mathbf{Q}$ 的凱萊–哈密頓定理（Cayley–Hamilton theorem）：每個方陣都滿足它自己的特徵方程（characteristic equation），這裏是 $\lambda^2-\lambda-1=0$。把特徵值（eigenvalues）為 $\frac{1}{2}(1\pm\sqrt{5})$ 的 $\mathbf{Q}$ 對角化（diagonalising），便得到 F_n 的比內（Binet）封閉公式；而矩陣的冪亦提供了一種以反覆平方（repeated squaring）快速計算 F_n 的方法。Strang 的 *Introduction to Linear Algebra*（《線性代數導論》）在介紹特徵值時，正是用這種方式處理斐波那契數。

Beyond STEP 詳細解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hant/。解答文字採用 CC0 1.0；題目本身版權屬 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予轉載。由機器從英文翻譯而成；尚未經審閱。