詳細解答

STEP II 2023，第 5 題

純數學 • 遞推關係與收斂

STEP II 2023，第 5 題

繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 OCR 提供下載的 2023 年 STEP 試卷（zip 檔案）內的 STEP II 試卷：

www.ocr.org.uk/Images/707102-2023-past-papers.zip

本題在 *Beyond STEP* 第 2.7 節六位還是六百位中有完整的引導式講解：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hant/ch02/newton-speed.html

關鍵思路

兩條遞推關係（recurrence）都是用來逼近 $\sqrt{2}$ 的「機器」，而題目關心的是誤差縮小得有多快。每一部分的竅門，都在於用恰當的方式量度誤差：在 (i) 中考慮 $x_n^2 - 2$，它每一步都會乘以一個大小不超過 $\frac{1}{4}$ 的因子（並且改變正負號）；在 (ii) 中考慮 $y_n - \sqrt{2}$，它每一步（大致上）會被平方。乘以一個常數只帶來穩定的進展；平方則每次令正確的位數加倍，這正是 (ii) 能在同樣十步之內達到 10^{-600} 的原因。

解答

第 (i) 部分

(a) 我們可以把遞推關係改寫為

$$x_{n+1} = \frac{(x_n + 1) + 1}{x_n + 1} = 1 + \frac{1}{x_n + 1}.$$

已知 $x_0 = 1 \geq 1$。若 $x_n \geq 1$，則 $x_n + 1 > 0$，故 $\frac{1}{x_n+1} > 0$，從而 $x_{n+1} > 1$。由歸納法（induction），對所有 n 都有 $x_n \geq 1$。

(b) 把各項通分至同一分母（common denominator）：

$$\begin{aligned} x_{n+1}^2 - 2 &= \frac{(x_n+2)^2 - 2(x_n+1)^2}{(x_n+1)^2} \\ &= \frac{x_n^2 + 4x_n + 4 - 2x_n^2 - 4x_n - 2}{(x_n+1)^2} \\ &= \frac{-(x_n^2-2)}{(x_n+1)^2}. \end{aligned}$$

分母是正數，所以 $x_{n+1}^2 - 2$ 與 $x_n^2 - 2$ 的正負號相反。（兩者都永不為零：由歸納法，每個 x_n 都是有理數（rational），而 $\sqrt{2}$ 是無理數（irrational）。）

取絕對值（modulus），並利用 (a) 得出的 $x_n + 1 \geq 2$，從而 $(x_n+1)^2 \geq 4$，

$$|x_{n+1}^2 - 2| = \frac{|x_n^2 - 2|}{(x_n+1)^2} \leq \tfrac{1}{4}|x_n^2 - 2|,$$

此即所求。

(c) 由於 $x_0^2 - 2 = -1$，把 (b) 應用十次，得

$$|x_{10}^2 - 2| \leq \left(\tfrac{1}{4}\right)^{10} |x_0^2 - 2| = \frac{1}{4^{10}} = \frac{1}{1\,048\,576} < 10^{-6}.$$

至於正負號：$x_0^2 - 2 < 0$，而正負號每一步都會翻轉，所以對每個偶數 n，$x_n^2 - 2$ 都是負數。特別地，$x_{10}^2 - 2 < 0$，因此

$$-10^{-6} < x_{10}^2 - 2 < 0, \qquad \text{即} \qquad 2 - 10^{-6} \leq x_{10}^2 \leq 2.$$

第 (ii) 部分

(a) 首先，每個 y_n 都是正數：$y_0 = 1 > 0$，而若 $y_n > 0$，則 $y_{n+1} = \frac{y_n^2+2}{2y_n} > 0$。所以遞推關係永遠不會出現除以零的情況。現在

$$y_{n+1} - \sqrt{2} = \frac{y_n^2 + 2 - 2\sqrt{2}\,y_n}{2y_n} = \frac{\left(y_n - \sqrt{2}\right)^2}{2y_n},$$

因為 $(y_n - \sqrt{2})^2 = y_n^2 - 2\sqrt{2}\,y_n + 2$。這就是所求的恆等式（identity）。

至於推論部分：$y_0 = 1$。對 $n \geq 1$，把恆等式應用於 $n-1$，可見 $y_n - \sqrt{2}$ 是一個平方數除以正數 $2y_{n-1}$，所以 $y_n - \sqrt{2} \geq 0$，因此 $y_n \geq \sqrt{2} > 1$。故對所有 $n \geq 0$ 都有 $y_n \geq 1$。

(b) 記 $e_n = y_n - \sqrt{2}$ 及 $r = \dfrac{\sqrt{2}-1}{2}$。由 (a)，對 $n \geq 1$ 有 $e_n \geq 0$；又因為 $y_n \geq 1$，

$$e_{n+1} = \frac{e_n^2}{2y_n} \leq \frac{e_n^2}{2}.$$

我們用歸納法證明對 $n \geq 1$ 有 $e_n \leq 2r^{2^n}$。

基本情況（*base case*）$n = 1$。$y_1 = \frac{3}{2}$，所以 $e_1 = \frac{3}{2} - \sqrt{2}$，而

$$2r^2 = 2 \cdot \frac{(\sqrt{2}-1)^2}{4} = \frac{3-2\sqrt{2}}{2} = \tfrac{3}{2} - \sqrt{2}.$$

所以上界在此取等號。

歸納步驟（*inductive step*）。假設對某個 $n \geq 1$ 有 $0 \leq e_n \leq 2r^{2^n}$。

想一想 為甚麼我們可以把 $e_n \leq 2r^{2^n}$ 的兩邊平方？

對非負數之間的不等式取平方，不等式仍然成立，而 $e_n \geq 0$ 正是 (a) 部分給我們的結果。（這也是上界由 $n = 1$ 而非 $n = 0$ 開始的原因：$e_0 = 1 - \sqrt{2}$ 是負數。）所以

$$e_{n+1} \leq \frac{e_n^2}{2} \leq \frac{\left(2r^{2^n}\right)^2}{2} = \frac{4r^{2^{n+1}}}{2} = 2r^{2^{n+1}},$$

歸納法至此完成。

(c) 下界 $y_{10} \geq \sqrt{2}$ 已在 (a) 證明。至於上界，由 $\sqrt{2} - 1 < \frac{1}{2}$ 得 $0 < r < \frac{1}{4}$，所以由 (b)

$$y_{10} - \sqrt{2} \leq 2r^{2^{10}} = 2r^{1024} < 2\left(\tfrac{1}{4}\right)^{1024} = 2 \cdot 2^{-2048} = 2^{-2047}.$$

要把它與 10 的冪比較，可利用 $2^{10} = 1024 > 10^3$：

$$2^{2047} > 2^{2040} = \left(2^{10}\right)^{204} > \left(10^3\right)^{204} = 10^{612} > 10^{600}.$$

因此 $y_{10} - \sqrt{2} < 2^{-2047} < 10^{-600}$，綜合而言

$$\sqrt{2} \leq y_{10} \leq \sqrt{2} + 10^{-600}.$$

想一想 (ii) 中驚人的速度從何而來？

在 (i) 中，誤差每次最多乘以 $\frac{1}{4}$，所以十步只能多得大約六個小數位。在 (ii) 中，誤差每次（大致上）被平方，所以指數 2^n 不斷加倍：十步就能把誤差由大約 $\frac{1}{10}$ 降至低於 10^{-600}。

驗算

- 首幾項：$x_1 = \frac{3}{2}$，$x_2 = \frac{7}{5}$，$x_3 = \frac{17}{12}$，而 $x_n^2 - 2$ 依次為 -1, $\frac{1}{4}$, $-\frac{1}{25}$, $\frac{1}{144}$：正負交替，而且每次至少縮小 4 倍。
- 用分數精確計算，得 $x_{10}^2 \approx 2 - 3.0 \times 10^{-8}$，穩穩落在區間 $[2 - 10^{-6}, 2]$ 之內。
- $y_2 = \frac{17}{12}$，所以 $y_2 - \sqrt{2} \approx 0.00245$，對比上界 $2r^4 \approx 0.00368$。用電腦以精確分數驗算，得 $y_{10} - \sqrt{2} \approx 10^{-783}$，遠低於所保證的 $2^{-2047} \approx 10^{-616}$。

常見錯誤

- 在 (i)(c) 中忘記考慮正負號：單靠絕對值的上界只能得出 $2 - 10^{-6} \leq x_{10}^2 \leq 2 + 10^{-6}$；上界 2 需要用到正負號交替這一點。
- 未先確定 $e_n \geq 0$ 便把 $e_n \leq 2r^{2^n}$ 平方。
- 停在 2^{-2047}，而沒有真正把它與 10^{-600} 比較；用不等式 $2^{10} > 10^3$ 是最簡潔的做法。

STEP 之外

(ii) 中的遞推關係，就是把牛頓（Newton）法（Newton's method）應用於 $f(y) = y^2 - 2$；而 (ii)(a) 中的恆等式，正是在說牛頓法在單根（simple root）附近二次收斂（quadratic convergence），而 (i) 則是收斂率不超過 $\frac{1}{4}$ 的線性收斂（linear convergence）的例子。數 x_n 亦是 $\sqrt{2}$ 的連分數（continued fraction）的漸近分數（convergents）。收斂階（order of convergence）和不動點迭代（fixed-point iteration）都是大學第一個數值分析（numerical analysis）課程的標準課題，而背後的分析理論在 Bartle 與 Sherbert 的 *Introduction to Real Analysis*（《實分析導論》）中有仔細的闡述。

Beyond STEP 詳細解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hant/。解答文字採用 CC0 1.0；題目本身版權屬 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予轉載。由機器從英文翻譯而成；尚未經審閱。