詳細解答

STEP II 2023，第 4 題

純數學 • 消去多項式中的根式

> **STEP II 2023，第 4 題**
>
> 繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 OCR 提供下載的 2023 年 STEP 試卷（zip 檔案）內的 STEP II 試卷：
>
> www.ocr.org.uk/Images/707102-2023-past-papers.zip

本題在 *Beyond STEP* 第 6.3 節以 $\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{5}$ 爲根的多項式中有完整的引導式講解：
https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hant/ch06/field-extensions.html

關鍵思路

要從方程中消去根式（surd），就把所有含該根式的項移到一邊，其餘的項移到另一邊，然後平方（或立方）。每一部分用的都是同一招：把數寫成「一個好處理的數加上一個根式」，把該根式單獨分離出來，再升冪直至它消失為止。如果展開後仍有根式殘留，就把含它的項集中到一邊，再重複一次。

解答

第 (i) 部分

展開 $(x-\sqrt{2})^2=3$，得 $x^2-2\sqrt{2}\,x+2=3$，即

$$x^2-1=2\sqrt{2}\,x.$$

現在根式已單獨在一邊，於是兩邊平方：

$$x^4-2x^2+1=8x^2 \quad\Longrightarrow\quad x^4-10x^2+1=0,$$

得證。（平方只是單向推導，但這正是我們所需要的：每個滿足第一條方程的 x 都滿足第二條方程。）

至於推論部分，取 $x=\sqrt{2}+\sqrt{3}$。那麼 $x-\sqrt{2}=\sqrt{3}$，所以 $(x-\sqrt{2})^2=3$，而由剛才所證，$\mathrm{f}(\sqrt{2}+\sqrt{3})=0$。

第 (ii) 部分

設 $x = \sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{5}$ 及 $y = x - \sqrt{5} = \sqrt{2}+\sqrt{3}$。由第 (i) 部分，$y^4 - 10y^2 + 1 = 0$。現在把它改寫成以 x 表示。首先，

$$y^2 = (x-\sqrt{5})^2 = (x^2+5) - 2\sqrt{5}\,x,$$

因此

$$\begin{aligned} y^4 &= (x^2+5)^2 - 4\sqrt{5}\,x(x^2+5) + 20x^2 \\ &= x^4 + 30x^2 + 25 - 4\sqrt{5}\,x^3 - 20\sqrt{5}\,x. \end{aligned}$$

所以

$$\begin{aligned} 0 &= y^4 - 10y^2 + 1 \\ &= \left(x^4 + 30x^2 + 25 - 4\sqrt{5}\,x^3 - 20\sqrt{5}\,x\right) - 10\left(x^2 + 5 - 2\sqrt{5}\,x\right) + 1 \\ &= x^4 + 20x^2 - 24 - 4\sqrt{5}\,x^3. \end{aligned}$$

$\sqrt{5}\,x$ 的項恰好互相抵消，相當幸運。現在只剩下一個含根式的項，於是把它分離出來再平方：

$$x^4 + 20x^2 - 24 = 4\sqrt{5}\,x^3 \quad\Longrightarrow\quad (x^4 + 20x^2 - 24)^2 = 80x^6.$$

展開左邊，

$$\begin{aligned} (x^4 + 20x^2 - 24)^2 &= x^8 + 40x^6 + 400x^4 - 48x^4 - 960x^2 + 576 \\ &= x^8 + 40x^6 + 352x^4 - 960x^2 + 576. \end{aligned}$$

減去 $80x^6$ 後，可取

$$g(x) = x^8 - 40x^6 + 352x^4 - 960x^2 + 576,$$

它的次數（degree）為 8，具有整數係數（integer coefficients），並且 $g(\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{5}) = 0$。

想一想 為甚麼我們先利用第 (i) 部分處理 $\sqrt{2}+\sqrt{3}$，最後才消去 $\sqrt{5}$，而不是從頭開始？

第 (i) 部分已經消去了三個根式中的兩個，所以我們只需再處理一個。以平方消去一個根式會使次數加倍，由 4 變成 8，這正好是題目所要求的次數。若從頭開始，就要同時應付三個根式。

第 (iii) 部分

設 $x = a + \sqrt{2}$，則 $a = x - \sqrt{2}$，且 $a^3 - 3a + 1 = 0$。展開，

$$(x - \sqrt{2})^3 = x^3 - 3\sqrt{2}\,x^2 + 6x - 2\sqrt{2},$$

所以

$$0 = (x - \sqrt{2})^3 - 3(x - \sqrt{2}) + 1 = x^3 + 3x + 1 - \sqrt{2}\,(3x^2 - 1).$$

把根式分離出來再平方：

$$x^3 + 3x + 1 = \sqrt{2}\,(3x^2 - 1) \quad \Longrightarrow \quad (x^3 + 3x + 1)^2 = 2(3x^2 - 1)^2.$$

兩邊分別為

$$(x^3 + 3x + 1)^2 = x^6 + 6x^4 + 2x^3 + 9x^2 + 6x + 1,$$
$$2(3x^2 - 1)^2 = 18x^4 - 12x^2 + 2,$$

所以可取

$$\mathrm{h}(x) = x^6 - 12x^4 + 2x^3 + 21x^2 + 6x - 1.$$

我們只用到 a 滿足 $t^3 - 3t + 1 = 0$ 這一事實，所以同樣的推導亦適用於 b 和 c。因此 $\mathrm{h}(a + \sqrt{2}) = \mathrm{h}(b + \sqrt{2}) = \mathrm{h}(c + \sqrt{2}) = 0$。

第 (iv) 部分

平方無法消去立方根（cube root），所以我們需要另一個恆等式（identity）。設 $p = \sqrt[3]{2}$、$q = \sqrt[3]{3}$ 及 $x = p + q$。由二項式展開（binomial expansion）得

$$x^3 = p^3 + q^3 + 3pq(p + q) = 5 + 3pq\,x.$$

想一想 pq 仍然是無理數（irrational），怎樣才能把它消去？

這裏 $pq = \sqrt[3]{6}$ 是唯一剩下的無理量，而且它只以因子的形式出現。我們把它分離出來再立方，並利用 $(pq)^3 = 6$：

$$x^3 - 5 = 3pq\,x \quad \Longrightarrow \quad (x^3 - 5)^3 = 27 \cdot 6\,x^3 = 162x^3.$$

由於 $(x^3 - 5)^3 = x^9 - 15x^6 + 75x^3 - 125$，可取

$$\mathrm{k}(x) = x^9 - 15x^6 - 87x^3 - 125,$$

它具有整數係數，且 $\mathrm{k}(\sqrt[3]{2} + \sqrt[3]{3}) = 0$。

驗算

- 在第 (ii) 部分，$\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{5} \approx 5.38233$。由 $x^2 \approx 28.9695$，得 $x^8 \approx 704\,310$ 及 $40x^6 \approx 972\,485$。再者 $352x^4 \approx 295\,410$ 及 $960x^2 \approx 27\,811$，而 g 的各項在捨入誤差範圍內互相抵消。
- 改變 $\sqrt{2}$、$\sqrt{3}$ 和 $\sqrt{5}$ 的正負號都不會改變 $\mathrm{g}(x)$，所以全部八個數 $\pm\sqrt{2}\pm\sqrt{3}\pm\sqrt{5}$ 都是根（root）。這解釋了為何次數是 8。同理，h 有六個根 $a\pm\sqrt{2}$、$b\pm\sqrt{2}$、$c\pm\sqrt{2}$。
- $t^3-3t+1=0$ 的根是 $2\cos 40^\circ$、$2\cos 160^\circ$ 和 $2\cos 280^\circ$。例如 $a \approx 1.53209$ 給出 $a+\sqrt{2}\approx 2.94630$，而 $\mathrm{h}(2.94630)$ 在捨入誤差範圍內等於零。
- 在第 (iv) 部分，$\sqrt[3]{2}+\sqrt[3]{3}\approx 2.70217$，而 $\mathrm{k}(2.70217)$ 在捨入誤差範圍內等於零。以電腦驗算，確認四個多項式（polynomial）的結果均準確至約 10^{-10}。

常見錯誤

- 未把根式分離出來就平方。若兩邊都留有 $\sqrt{5}$ 的項，它們便不會抵消。
- 在第 (iv) 部分嘗試平方，或者把 x 立方卻沒有留意到 $x^3=5+3pqx$。展開式 $(p+q)^3=p^3+q^3+3pq(p+q)$ 就是整個竅門所在。
- 在第 (iii) 部分展開三次式時弄錯正負號，尤其是常數項 $-2\sqrt{2}+3\sqrt{2}=\sqrt{2}$。

STEP 之外

若一個數是某個整數係數多項式的根，就稱它為代數數（algebraic）。這道題以人手計算的方式說明了代數數之和仍是代數數。一般情況的證明要用到線性代數（linear algebra）：$\mathbb{Q}(\alpha,\beta)$ 是 $\mathbb{Q}$ 上的有限維向量空間（finite-dimensional vector space）。因此冪 $1,\alpha+\beta,(\alpha+\beta)^2,\ldots$ 最終必定線性相關（linearly dependent）。這裏出現的次數 4、8、6 和 9，正是這些域擴張（field extensions）的維數。想進一步了解，可參閱 Allenby 的 *Rings, Fields and Groups*（《環、域與羣》）。

Beyond STEP 詳細解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hant/。解答文字採用 CC0 1.0；題目本身版權屬 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予轉載。由機器從英文翻譯而成；尚未經審閱。