詳細解答

# STEP II 2023，第 3 題

純數學 • 多項式與導數

**STEP II 2023，第 3 題**

繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 OCR 提供下載的 2023 年 STEP 試卷（zip 檔案）內的 STEP II 試卷：

www.ocr.org.uk/Images/707102-2023-past-papers.zip

## 關鍵思路

對 $q$ 求導（differentiate），只會把和式中的每一項向後移一位，而最後一個導數為零，所以 $q' = q - p$。整道題都由這一個關係推動。之後三個證明 $q > 0$ 的方法，分別從三個角度解讀這個關係：作為關於駐點（stationary point）的事實；作為 $\mathrm{e}^{-x}q(x)$ 的導數（即積分因子（integrating factor））；以及作為反覆使用分部積分法（integration by parts）所得的積分公式。

## 解答

以下一律記 $p(x) = ax^n + \ldots$，其中 $a \neq 0$。對於 $k \geq 1$，$p^{(k)}$ 的次數小於 $n$（或為零），而 $p^{(n+1)} \equiv 0$。

### 第 (i) 部分

**(a)** 奇數次多項式（polynomial）在實數線的一端趨向 $+\infty$，在另一端趨向 $-\infty$。由於它是連續的，根據介值定理（intermediate value theorem），它必在某處取值 0。但對所有 $x$ 都有 $p(x) > 0$，所以 $p$ 沒有實根，因此 $n$ 必為偶數。

此外 $a > 0$：若 $a < 0$，則當 $x \to \infty$ 時 $p(x) \to -\infty$，與 $p > 0$ 矛盾。在 $q = p + p' + \cdots + p^{(n)}$ 中，第一項以後的每一項次數都小於 $n$，所以 $q$ 的次數亦為 $n$，而首項係數（leading coefficient）為 $a > 0$。因此當 $x \to \infty$ 時 $q(x) \to +\infty$（而由於 $n$ 是偶數，當 $x \to -\infty$ 時亦然），所以 $q$ 必定取到正值。（若 $n = 0$，則 $q = p$ 是正的常數。）

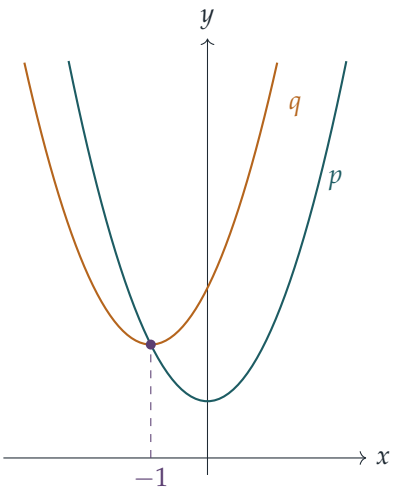
**(b)** 逐項求導，

$$q'(x) = \sum_{k=0}^{n} p^{(k+1)}(x) = \sum_{k=1}^{n+1} p^{(k)}(x) = \sum_{k=0}^{n} p^{(k)}(x) - p(x) + p^{(n+1)}(x) = q(x) - p(x),$$

因為對於 $n$ 次多項式，$p^{(n+1)} \equiv 0$。

### 第 (ii) 部分

**(a)** 在 $y = q(x)$ 的駐點 $x_0$ 處，有 $q'(x_0) = 0$，所以由 (i)(b) 得 $q(x_0) = p(x_0)$：兩條曲線在該處相交。




（圖中所示為 $p(x) = x^2 + 1$，此時 $q(x) = x^2 + 2x + 3$。$q$ 的最小值在 $x = -1$ 處，正正是兩條曲線相交之處。）

現在證明 $q > 0$。若 $n = 0$，則 $q = p > 0$，所以設 $n \geq 2$。由 (i)(a)，當 $x \to \pm\infty$ 時 $q(x) \to +\infty$，所以可以選取 $R > 0$，使得只要 $|x| > R$，便有 $q(x) > q(0)$。

**想一想** 我們怎樣知道 $q$ 確實有最低點，而且該點是駐點？

在閉區間 $[-R, R]$ 上，連續函數 $q$ 在某點 $x_0$ 取得最小值，且 $q(x_0) \leq q(0)$。在區間以外，$q$ 大於 $q(0)$，所以 $q(x_0)$ 是 $q$ 在整條實數線上的最小值。由於 $x_0$ 是 $\mathbb{R}$ 的內點（interior point），且 $q$ 可導（differentiable），故 $q'(x_0) = 0$。由第一個結果，$q(x_0) = p(x_0) > 0$。所以對每個 $x$，

$$q(x) \geq q(x_0) = p(x_0) > 0.$$

**(b)** 利用 (i)(b)，

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(\mathrm{e}^{-x}q(x)) = \mathrm{e}^{-x}(q'(x) - q(x)) = -\mathrm{e}^{-x}p(x) < 0$$

對所有 $x$ 成立，因為 $p>0$。所以 $\mathrm{e}^{-x}q(x)$ 是（嚴格）遞減的。

至於 $q>0$：由於 $q$ 是多項式，當 $X\to\infty$ 時 $\mathrm{e}^{-X}q(X)\to 0$（指數函數增長得比冪函數快）。遞減函數永遠不會低於它在 $+\infty$ 的極限，所以對所有 $X$ 都有 $\mathrm{e}^{-X}q(X)\geq 0$。於是對任意 $x$，嚴格遞減給出

$$\mathrm{e}^{-x}q(x)>\mathrm{e}^{-(x+1)}q(x+1)\geq 0,$$

再乘以 $\mathrm{e}^{x}>0$，便得 $q(x)>0$。

**(c)** 這裏所有積分都收斂（converge），因為 $t$ 的多項式乘以 $\mathrm{e}^{-t}$ 在 $[0,\infty)$ 上可積。取 $u=p(x+t)$ 及 $\mathrm{d}v=\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t$ 作分部積分（把 $x$ 視為常數）：

$$\begin{aligned}\int_0^\infty p(x+t)\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t&=\Big[-p(x+t)\mathrm{e}^{-t}\Big]_0^\infty+\int_0^\infty p^{(1)}(x+t)\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t\\&=p(x)+\int_0^\infty p^{(1)}(x+t)\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t,\end{aligned}$$

因為當 $t\to\infty$ 時 $p(x+t)\mathrm{e}^{-t}\to 0$。這就是第一個結果。

上述計算除了 $p$ 是多項式之外，沒有用到 $p$ 的任何其他性質，所以同樣的結果對每一個導數都成立：記

$$I_k(x)=\int_0^\infty p^{(k)}(x+t)\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t,\qquad \text{我們有}\qquad I_k(x)=p^{(k)}(x)+I_{k+1}(x)$$

對於 $k=0,1,\ldots,n$ 成立。此外 $I_{n+1}(x)=0$，因為 $p^{(n+1)}\equiv 0$。反覆應用這個關係，

$$I_0(x)=p(x)+I_1(x)=p(x)+p^{(1)}(x)+I_2(x)=\cdots=\sum_{k=0}^{n}p^{(k)}(x)+I_{n+1}(x)=q(x),$$

這就是第二個結果。

> **想一想** 為甚麼這條公式令 $q(x)>0$ 變得顯而易見？

對每個固定的 $x$，被積函數（integrand）$p(x+t)\mathrm{e}^{-t}$ 對每個 $t\geq 0$ 都連續且嚴格為正，因為 $p>0$ 處處成立。連續且嚴格為正的函數在長度為正的區間上的積分嚴格為正。所以對所有 $x$，$q(x)=I_0(x)>0$。

## 驗算

- 取 $p(x)=x^2+1$，得 $q(x)=x^2+2x+3=(x+1)^2+2$。確實 $q'=2x+2=q-p$，$q$ 的最小值為 2，在 $x=-1$ 處取得，而 $p(-1)=2$，正如 (ii)(a) 所預測。
- 對同一個 $p$，在 $x=0$ 處：$\int_0^\infty(t^2+1)\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t=2!+1=3=q(0)$。
- 我們用電腦對 300 個次數不超過 6 的隨機處處為正多項式作驗證：$q'=q-p$ 準確成立；在 $[-20,20]$ 的網格上 $q>0$ 而 $\mathrm{e}^{-x}q(x)$ 遞減；以及數值積分重現 $q(x)$ 至約十位有效數字。

## 常見錯誤

- 在 (ii)(a) 中，沒有給出理由便假設最小值存在。這需要在兩端都有 $q \to +\infty$，而這用到 (i)(a) 中的 $n$ 為偶數及 $a > 0$。
- 在 (ii)(b) 中，只由極限得出 $\mathrm{e}^{-x}q(x) \geq 0$ 便停下。正是嚴格遞減把這個結論提升為 $q(x) > 0$。
- 忘記了邊界項 $p(x+t)\mathrm{e}^{-t}$ 必須在 $t \to \infty$ 時趨於零，才可以把它捨去。

## STEP 之外

(ii)(b) 中的函數 $\mathrm{e}^{-x}$ 是一個積分因子，而 (ii)(c) 則明確地解出 $q' - q = -p$。公式 $\int_0^\infty p(x+t)\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t$ 是一種拉普拉斯變換（Laplace transform）式的積分，而恆等式 $q = (1 + D + D^2 + \cdots)p = (1 - D)^{-1}p$（其中 $D$ 表示求導）則讓人初嚐線性微分方程（linear differential equations）的算子方法（operator methods）。Boyce 與 DiPrima 的 *Elementary Differential Equations*（《初等微分方程》）涵蓋積分因子及拉普拉斯變換；Abbott 的 *Understanding Analysis*（《理解分析》）則把 (ii)(a) 中的極值論證嚴格化。

Beyond STEP 詳細解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hant/。解答文字採用 CC0 1.0；題目本身版權屬 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予轉載。由機器從英文翻譯而成；尚未經審閱。