詳細解答

STEP II 2023，第 2 題

純數學 • 三角代換

STEP II 2023，第 2 題

繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 OCR 提供下載的 2023 年 STEP 試卷（zip 檔案）內的 STEP II 試卷：

www.ocr.org.uk/Images/707102-2023-past-papers.zip

關鍵思路

每條等式的右方，其實都是一條熟悉的倍角公式（multiple-angle formula）換了個樣子：當 $t = \tan\alpha$ 時，$\frac{2t}{1-t^2}$ 就是 $\tan 2\alpha$，$\frac{3t-t^3}{1-3t^2}$ 就是 $\tan 3\alpha$；而當 $t = \cos\alpha$ 時，$2t^2 - 1$ 就是 $\cos 2\alpha$。作代換（substitution）後，三條互相牽連的方程便化為一條只含一個角的三角方程，既容易求解，更重要的是容易計數。唯一要小心的，是確保這個代換恰好把每個解都捕捉一次。

解答

第 (i) 部分

每個實數都恰好對應 $(-\frac{1}{2}\pi, \frac{1}{2}\pi)$ 中的一個 α，使該實數等於 $\tan\alpha$，所以把 x 寫成 $x = \tan\alpha$（其中 α 在該區間內）不會遺失任何解。第一條方程要有意義，須有 $x \neq \pm 1$，即 $\alpha \neq \pm\frac{1}{4}\pi$，因此 2α 不是 $\frac{1}{2}\pi$ 的奇數倍，可以使用二倍角公式（double-angle formula）：

$$y = \frac{2\tan\alpha}{1-\tan^2\alpha} = \tan 2\alpha.$$

對 $y = \tan 2\alpha$ 作完全相同的步驟（由於 z 有定義，故 $y \neq \pm 1$），得 $z = \tan 4\alpha$；再對 z 作同樣步驟（由於 $z \neq \pm 1$），得 $x = \tan 8\alpha$。又因 $x = \tan\alpha$，故

$$\tan\alpha = \tan 8\alpha,$$

此即所求。兩個角的正切相等，當且僅當兩角相差 π 的整數倍，所以對某整數 k 有 $8\alpha = \alpha + k\pi$，即

$$\alpha = \frac{k\pi}{7}.$$

條件 $-\frac{1}{2}\pi < \alpha < \frac{1}{2}\pi$ 等價於 $-\frac{7}{2} < k < \frac{7}{2}$，所以 $k = -3, -2, \ldots, 3$。

反過來，這七個值每一個都給出真正的解：$2\alpha = \frac{2k\pi}{7}$ 和 $4\alpha = \frac{4k\pi}{7}$ 永遠不會是 $\frac{1}{2}\pi$ 的奇數倍（否則 $4k$ 或 $8k$ 須等於 7 乘一個奇數，於是 $7 \mid k$，迫使 $k = 0$，但這時得到的是 0，並非奇數倍），所以 x, y, z 都不等於 ± 1，每個分母都不為零，上面的推導可以倒過來進行。不同的 k 給出 $(-\frac{1}{2}\pi, \frac{1}{2}\pi)$ 中不同的 α，因而給出不同的 x。所以恰好有七個解。

要以題目要求的形式寫出這些解，可利用 $\tan(\theta - \pi) = \tan\theta$，把 2α 和 4α 減去 π 的倍數，化到 $(-\frac{1}{2}\pi, \frac{1}{2}\pi)$ 之內。例如 $\tan\frac{4\pi}{7} = \tan(-\frac{3\pi}{7})$，$\tan\frac{8\pi}{7} = \tan\frac{\pi}{7}$。記 $t_m = \tan\frac{m\pi}{7}$，則解 (x, y, z) 為：

k	(x, y, z)
0	$(0, 0, 0)$
1	$(t_1,\ t_2,\ t_{-3})$
2	$(t_2,\ t_{-3},\ t_1)$
3	$(t_3,\ t_{-1},\ t_{-2})$

k	(x, y, z)
-1	$(t_{-1},\ t_{-2},\ t_3)$
-2	$(t_{-2},\ t_3,\ t_{-1})$
-3	$(t_{-3},\ t_1,\ t_2)$

留意除 $(0, 0, 0)$ 外，這些解正是 (t_1, t_2, t_{-3}) 和 (t_{-1}, t_{-2}, t_3) 的循環排列（cyclic rearrangement）。這是必然的，因為方程組在 $x \to y \to z \to x$ 之下保持不變。

第 (ii) 部分

先推導三倍角公式（triple-angle formula）：設 $t = \tan\alpha$，

$$\tan 3\alpha = \frac{\tan 2\alpha + \tan\alpha}{1 - \tan 2\alpha \tan\alpha} = \frac{\frac{2t}{1-t^2} + t}{1 - \frac{2t^2}{1-t^2}} = \frac{2t + t - t^3}{1 - t^2 - 2t^2} = \frac{3t - t^3}{1 - 3t^2}.$$

與前相同，設 $x = \tan\alpha$，其中 $-\frac{1}{2}\pi < \alpha < \frac{1}{2}\pi$。方程要求 $1 - 3x^2$、$1 - 3y^2$、$1 - 3z^2$ 皆不為零；在此前提下，公式依次給出 $y = \tan 3\alpha$、$z = \tan 9\alpha$ 和 $x = \tan 27\alpha$。於是 $\tan\alpha = \tan 27\alpha$，得 $26\alpha = k\pi$，即

$$\alpha = \frac{k\pi}{26}, \qquad -13 < k < 13.$$

這是 α 的 25 個候選值，各自給出不同的 x 值。

> **想一想** 這 25 個候選值當中，會不會有些令某個分母為零，因而並非真正的解？

這正是需要檢查的地方。分母 $1 - 3\tan^2\beta$ 在 $\beta \equiv \pm\frac{1}{6}\pi \pmod{\pi}$ 時為零，而當 β 是 $\frac{1}{2}\pi$ 的奇數倍時，正切本身沒有定義。這裏涉及的角是 $\beta = 3^j \cdot \frac{k\pi}{26}$，其中 $j = 0, 1, 2$。

- 若 $3^j k\pi/26 = \pm\frac{1}{6}\pi + m\pi$，則 $3^{j+1}k = \pm 13 + 78m$。左方是 3 的倍數，右方卻不是（因為 78 是 3 的倍數而 13 不是）。不可能。

- 若 $3^j k\pi/26 = \frac{1}{2}(2m+1)\pi$，則 $3^j k = 13(2m+1)$，所以 13 整除 k，迫使 $k = 0$；但這時左方為 0，並非 13 的奇數倍。不可能。

所以每個候選值都是真正的解，方程組恰好有 25 個實數解。（區間所排除的 $k = \pm 13$ 對應 $\alpha = \pm\frac{1}{2}\pi$，此時 $\tan\alpha$ 不存在。）

第 (iii)(a) 部分

現在 $|x| \le 1$，所以可以對恰好一個 $\alpha \in [0,\pi]$ 寫 $x = \cos\alpha$。二倍角公式 $\cos 2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1$ 給出 $y = \cos 2\alpha$，繼而 $z = \cos 4\alpha$ 及 $x = \cos 8\alpha$；這些自動滿足 $|y| \le 1$ 和 $|z| \le 1$。因此三者皆在 $[-1,1]$ 內的解，恰好對應滿足

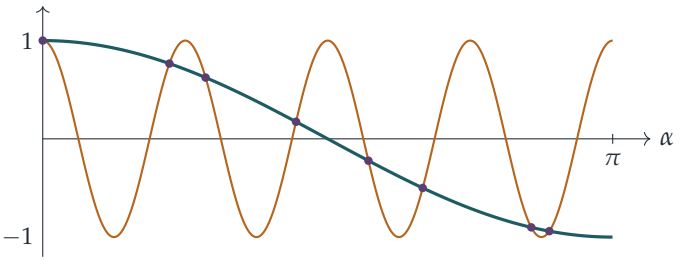
$$\cos 8\alpha = \cos\alpha.$$

的 $\alpha \in [0,\pi]$。兩個角的餘弦相等，當且僅當兩角在相差 2π 的整數倍的意義下相等或互為相反數，所以

$$8\alpha = \alpha + 2m\pi \quad \text{或} \quad 8\alpha = -\alpha + 2n\pi, \qquad \text{即} \qquad \alpha = \frac{2m\pi}{7} \quad \text{或} \quad \alpha = \frac{2n\pi}{9}.$$

在 $[0,\pi]$ 內，第一族給出 $m = 0,1,2,3$，即 $0, \frac{2\pi}{7}, \frac{4\pi}{7}, \frac{6\pi}{7}$；第二族給出 $n = 0,1,2,3,4$，即 $0, \frac{2\pi}{9}, \frac{4\pi}{9}, \frac{6\pi}{9}, \frac{8\pi}{9}$。唯一重疊的是 $\alpha = 0$（公共值須滿足 $\frac{m}{7} = \frac{n}{9}$，即 $9m = 7n$，迫使 $7 \mid m$）。於是剩下 $4 + 5 - 1 = 8$ 個不同的 α 值；由於餘弦在 $[0,\pi]$ 上是一一對應（one-to-one）的，它們給出 8 個不同的 x 值，每個 x 決定 y 和 z。所以滿足 $|x|, |y|, |z| \le 1$ 的解恰好有 8 個。

下圖顯示在 $[0,\pi]$ 上 $\cos 8\alpha$（琥珀色）與 $\cos\alpha$（青綠色）的八個交點。



第 (iii)(b) 部分

現在取消限制。消去 y 和 z：$y = 2x^2 - 1$ 是 x 的二次式，所以 $z = 2y^2 - 1$ 是 x 的 4 次多項式（polynomial），於是 $x = 2z^2 - 1$ 變成

$$x = 2\Big(2\big(2x^2-1\big)^2 - 1\Big)^2 - 1,$$

這是 x 的 8 次多項式方程（右方的首項（leading term）是 $2\cdot(2\cdot 2^2)^2x^8 = 128x^8$，沒有任何項能把它抵消）。展開後為

$$128x^8 - 256x^6 + 160x^4 - 32x^2 - x + 1 = 0.$$

方程組的每個解 (x, y, z) 中，x 都是這個八次多項式（octic）的根，而 x 決定 y 和 z。8 次多項式最多有 8 個實根，而 (a) 部分已經找到 8 個不同的實根，即該部分求得的八個 α 值所對應的 $\cos\alpha$。所以這些就是全部的根，方程組的每個解都是 (a) 中八個解之一。特別地，每個解都滿足 $|x| \le 1$、$|y| \le 1$、$|z| \le 1$，這正是要證明的。

想一想 為甚麼 (b) 需要用到次數，而不能單靠 (a) 的八個解？

(a) 部分只找出 $[-1, 1]$ 內的解；單憑它，對例如 $x = 5$ 的情況甚麼也說不出來。排除其他一切可能的，是次數的上界：八次多項式最多只有八個根，而 (a) 已經把它們用盡。

驗算

- 在 (i) 中取 $k = 1$：$\tan\frac{\pi}{7} \approx 0.4816$，而 $\frac{2(0.4816)}{1-0.4816^2} \approx 1.2540 = \tan\frac{2\pi}{7}$。再做兩步便回到 0.4816。
- 以電腦在實數線上搜尋 $f(f(f(x))) = x$ 的根，對 $f(t) = \frac{2t}{1-t^2}$ 恰好找到 7 個根，對 $f(t) = \frac{3t-t^3}{1-3t^2}$ 恰好找到 25 個，後者與 $\tan\frac{k\pi}{26}$（$|k| \le 12$）吻合。
- 在 (iii) 中，$x = 1$ 給出 $y = z = 1$，即 $\alpha = 0$ 的解；而確實 $128 - 256 + 160 - 32 - 1 + 1 = 0$。在 $[-50, 50]$ 上搜尋該八次多項式的根，恰好找到 8 個，全部在 $[-1, 1]$ 內。

常見錯誤

- 在 (ii) 中容許 $k = \pm 13$（或完全不限制 α），得出 27 個解；$\alpha = \pm\frac{1}{2}\pi$ 並不對應任何實數 x。
- 在 (iii)(a) 中漏掉第二族 $8\alpha = -\alpha + 2n\pi$，或把 $\alpha = 0$ 計算了兩次。
- 在 (i) 中沒有化簡 $\tan\frac{4\pi}{7}$ 之類的答案，而題目要求角度須在 $(-\frac{1}{2}\pi, \frac{1}{2}\pi)$ 之內。

STEP 之外

滿足 $T_n(\cos\alpha) = \cos n\alpha$ 的多項式 T_n 稱為切比雪夫多項式（Chebyshev polynomials）；第 (iii) 部分就是方程 $T_8(x) = x$，而上面的八次多項式就是 $T_8(x) - x$。反覆迭代像 $x \mapsto 2x^2 - 1$ 這樣的映射，並追問哪些點在三步後回到原處，正是動力系統（dynamical systems）理論的起點：這個映射在 $[-1, 1]$ 上是「混沌」（chaotic）的，而角度代換

把它變成簡單的倍增 $\alpha \mapsto 2\alpha$。同樣的技巧也解釋了為何 (i) 和 (ii) 中的正切映射有那麼多週期點（periodic points）。Siklos 的 *Advanced Problems in Mathematics*（《高等數學難題》）收錄了更多同類題目。

Beyond STEP 詳細解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hant/。解答文字採用 CC0 1.0；題目本身版權屬 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予轉載。由機器從英文翻譯而成；尚未經審閱。