詳細解答

STEP II 2023，第 10 題

力學 • 拋體軌道的包絡線

STEP II 2023，第 10 題

繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 OCR 提供下載的 2023 年 STEP 試卷（zip 檔案）內的 STEP II 試卷：

www.ocr.org.uk/Images/707102-2023-past-papers.zip

關鍵思路

一條軌跡與曲線 E 相切，當且僅當求它們公共點的方程有重根，所以第 (i) 部分其實是一個判別式（discriminant）的計算。要求對每一個角度都出現這種情況，便迫使 E 成為所有軌跡的包絡線（envelope），即速度為 u 的質點所能到達範圍的邊界。題目其餘部分從三個角度審視這條邊界：哪些點可以被擊中、質點在某一固定時刻位於何處，以及沿着包絡線本身滑行的第二粒質點。

解答

全題中，質點視為只受重力作用而自由運動的點，不計空氣阻力，並記 $c = \cos\alpha$，$s = \sin\alpha$。

第 (i) 部分

設 t 為拋出後經過的時間，則 P_α 一直留在平面 $y = 0$ 上，且

$$x = uct, \qquad z = ust - \tfrac{1}{2}gt^2.$$

消去 $t = x/(uc)$，得到軌跡（trajectory）

$$z = x\tan\alpha - \frac{gx^2}{2u^2c^2}.$$

與 E 的公共點滿足 $A - Bx^2 = x\tan\alpha - \dfrac{gx^2}{2u^2c^2}$，即

$$\left(\frac{g}{2u^2c^2} - B\right)x^2 - x\tan\alpha + A = 0. \qquad (*)$$

若 x^2 的係數為零，則 $(*)$ 是線性方程，而 $\tan\alpha \neq 0$，這只會給出一個穿越點而非相切，所以 $(*)$ 確實是二次方程。兩曲線恰好相切一次，當且僅當 $(*)$ 有重根，即其判別式為零：

$$\tan^2\alpha = 4A\left(\frac{g}{2u^2c^2} - B\right).$$

兩邊乘以 u^2c^2：

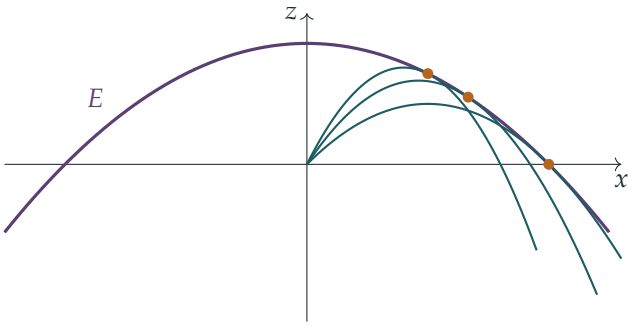
$$\begin{aligned} u^2s^2 &= 2gA - 4ABu^2c^2 \\ u^2 - u^2c^2 &= 2gA - 4ABu^2c^2 \qquad (\text{利用} s^2 = 1 - c^2) \\ u^2 - 2gA &= u^2(1 - 4AB)\cos^2\alpha, \end{aligned}$$

此即所求。

若此式對 $(0, \frac{1}{2}\pi)$ 中每一個 α 都成立，則左邊是常數，而 $\cos^2\alpha$ 取遍 $(0,1)$ 中所有值。一個常數對所有這些值都等於 $k\cos^2\alpha$，便迫使 $k = 0$，從而該常數為 0。所以 $u^2 = 2gA$ 且 $4AB = 1$：

$$A = \frac{u^2}{2g}, \qquad B = \frac{g}{2u^2}.$$

反過來，這些值使恆等式對每一個 α 都成立。切點就是重根 $x = \dfrac{\tan\alpha}{2(g/(2u^2c^2) - B)} = \dfrac{u^2}{g\tan\alpha}$。



上圖（取 $u^2/g = 2$ 繪製）顯示三條軌跡，每條都在琥珀色的點與 E 相切一次。

第 (ii) 部分

每粒質點都在包含其初速度的鉛垂平面內運動，而整個情況關於 z 軸對稱。因此考慮一個與 z 軸水平距離為 r、高度為 z 的點，並在通過該點的鉛垂平面內處理，設 $\theta \in (-\frac{1}{2}\pi, \frac{1}{2}\pi)$ 為朝該點方向、高於水平線的拋射角。

若 $r = 0$，只有垂直向上或向下射出的質點能夠到達；向上射出的那粒可到達不超過 $u^2/(2g)$ 的每一個高度，向下射出的那粒可到達每一個負高度，所以軸上可到達的點就是滿足 $z \leq u^2/(2g)$ 的點。

若 $r > 0$，與第 (i) 部分完全一樣，質點經過該點當且僅當

$$z = r\tan\theta - \frac{gr^2}{2u^2}(1+\tan^2\theta),$$

這裏用了 $1/\cos^2\theta = 1+\tan^2\theta$。記 $T = \tan\theta$，它可取任何實數值，於是得到二次方程

$$\frac{gr^2}{2u^2}T^2 - rT + \left(z + \frac{gr^2}{2u^2}\right) = 0,$$

它有實根當且僅當

$$r^2 \geq \frac{2gr^2}{u^2}\left(z+\frac{gr^2}{2u^2}\right) \iff z \leq \frac{u^2}{2g} - \frac{gr^2}{2u^2},$$

這裏除以了 $2gr^2/u^2 > 0$。

所以，由 $r^2 = x^2+y^2$，可被擊中的點恰好是位於拋物面（paraboloid）

$$z = \frac{u^2}{2g} - \frac{g}{2u^2}(x^2+y^2),$$

之上或其下方的點；這個曲面正是把 E（取第 (i) 部分的值）繞 z 軸旋轉而得的。嚴格位於其下方的點可由平面內兩個方向到達，位於其上的點恰好由一個方向到達（即重根，與第 (i) 部分的相切吻合），而位於其上方的點則無法到達。

第 (iii) 部分

設質點的初速度為 $u\mathbf{n}$，其中 $\mathbf{n}$ 是單位向量（unit vector）。經過時間 t 後，其位置為

$$\mathbf{r} = ut\,\mathbf{n} - \tfrac{1}{2}gt^2\,\mathbf{k},$$

其中 $\mathbf{k}$ 是向上的單位向量。因此

$$|\mathbf{r} - (-\tfrac{1}{2}gt^2\,\mathbf{k})| = |ut\,\mathbf{n}| = ut.$$

所以在時刻 t，每粒質點都位於以 $(0,0,-\frac{1}{2}gt^2)$ 為球心、ut 為半徑的球面上。從物理角度看：重力使每粒質點獲得相同的加速度，所以相對於一個從原點自由下落的點，它們全都以速率 u 沿直線向外飛散。

第 (iv) 部分

設 τ 為 Q 拋出後經過的時間，則 Q 有 $y = 0$ 及

$$x = u\tau, \qquad z = A - \tfrac{1}{2}g\tau^2.$$

代入 $\tau = x/u$：

$$z = A - \frac{g}{2u^2}x^2 = A - Bx^2,$$

這裏用了第 (i) 部分的 $B = g/(2u^2)$。所以 Q 一直在 E 上。

第 (v) 部分

假設 Q 在爆炸後時刻 T 拋出，並且 Q 與 P_α 在爆炸後時刻 t $(\geq T)$ 位於同一點。那麼 $\tau = t - T$，而兩者的 y 坐標都是 0，所以需要 x 坐標和 z 坐標相等：

$$uct = u(t-T),$$
$$ust - \tfrac{1}{2}gt^2 = A - \tfrac{1}{2}g(t-T)^2.$$

第一式給出 $t - T = ct$，所以 $T = t(1-c)$。把 $t - T = ct$ 代入第二式，並利用 $1 - c^2 = s^2$：

$$ust - \tfrac{1}{2}gs^2t^2 = A = \frac{u^2}{2g}.$$

> **想一想** 怎樣不用繁瑣的公式來解出 t？

乘以 $2g$ 並把所有項移到一邊：$g^2s^2t^2 - 2gus\,t + u^2 = 0$，這是一個完全平方

$$(gst - u)^2 = 0, \qquad \text{所以} \qquad t = \frac{u}{g\sin\alpha}.$$

出現重根正是意料之中：碰撞必須發生在 P_α 的軌跡與 E 相切之處，因為那是兩條路徑唯一的公共點。事實上，此時 P_α 位於 $x = uct = u^2/(g\tan\alpha)$，正是第 (i) 部分求得的切點。因此

$$T = t(1-\cos\alpha) = \frac{u(1-\cos\alpha)}{g\sin\alpha},$$

此即所求。由於 $0 < 1 - \cos\alpha < 1$，得 $0 < T < t$，所以 Q 確實是在爆炸之後、碰撞之前拋出的。

驗算

- 在第 (i) 部分，取 $\alpha = \frac{1}{4}\pi$ 得切點 $x = u^2/g$，$z = 0$：這是在水平地面上的最大射程，可到達區域的邊界理應經過此點。
- 在第 (ii) 部分，在軸 $r = 0$ 上，界限是 $z \leq u^2/(2g)$，即垂直向上射出的質點所達的最大高度。
- 在第 (v) 部分，取 $u = 7$、$g = 9.8$ 及 $\alpha = 0.5$，公式給出 $T \approx 0.182$；把兩個運動逐步按時間推進，可確認兩粒質點在 $t = u/(g\sin\alpha) \approx 1.49$ 相遇，而即使把 Q 延遲 0.05 才拋出，它們便會錯過。
- 當 $\alpha \to \frac{1}{2}\pi$ 時，$T \to u/g$ 且 $t \to u/g$：P_α 幾乎垂直向上，到達 E 的頂點 $(0, 0, A)$，到達時刻為 u/g，恰好是 Q 從那裏出發的時刻。

常見錯誤

- 未先把公共點方程整理成關於 x 的單一二次方程便令判別式為零，結果在 x^2 的係數中漏掉了 $-B$ 項。
- 在第 (ii) 部分只描述邊界曲面：題目要求的是整個集合，即拋物面之上及其下方的實心區域。
- 在第 (v) 部分，兩粒質點用了同一個時間變量：Q 只運動了 $t - T$ 的時間。

STEP 之外

曲線 E 是這族軌跡的*包絡線*：一條與族中每一成員都相切的曲線。一般而言，曲線族 $F(x, z, \alpha) = 0$ 的包絡線可透過在 $F = 0$ 與 $\partial F/\partial \alpha = 0$ 之間消去 α 求得，這就是本題所用重根條件的微積分版本。第 (ii) 部分的拋物面常被稱為*安全拋物面*（paraboloid of safety），而第 (iii) 部分則是轉換到自由下落參考系（freely falling frame）的一個例子，在該參考系中重力消失了。Kleppner 與 Kolenkow 的 *An Introduction to Mechanics*（《力學導論》）對這兩個概念都有闡述。

Beyond STEP 詳細解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hant/。解答文字採用 CC0 1.0；題目本身版權屬 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予轉載。由機器從英文翻譯而成；尚未經審閱。