詳細解答

STEP II 2023，第 1 題

純數學 • 代換積分法

STEP II 2023，第 1 題

繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 OCR 提供下載的 2023 年 STEP 試卷（zip 檔案）內的 STEP II 試卷：

www.ocr.org.uk/Images/707102-2023-past-papers.zip

關鍵思路

代換（substitution）$x = 1/t$ 把 $\frac{1}{2}$ 和 2 互換，因此它把區間（interval）$[\frac{1}{2}, 2]$ 映射到自身（方向相反）。於是，在這個區間上的積分（integral）可以改寫成在同一區間上、外表不同的另一個積分。有時新的被積函數（integrand）可以直接積分；有時它是原被積函數的「搭檔」，把兩者相加（或互相比較）便能替我們完成工作。

解答

第 (i) 部分

設 $x = 1/t$，則 $\mathrm{d}x = -\frac{1}{t^2}\,\mathrm{d}t$。由於 $a > 0$，$[a, b]$ 中每個 x 都是正數，對應的 t 亦然。於是

$$1 + x^2 = \frac{t^2 + 1}{t^2} \quad \Longrightarrow \quad (1 + x^2)^{3/2} = \frac{(1 + t^2)^{3/2}}{t^3},$$

這裏用到了 $\sqrt{t^2} = t$，因為 $t > 0$。積分限 $x = a$ 和 $x = b$ 變成 $t = a^{-1}$ 和 $t = b^{-1}$。因此

$$\int_a^b \frac{1}{(1 + x^2)^{3/2}}\,\mathrm{d}x = \int_{a^{-1}}^{b^{-1}} \frac{t^3}{(1 + t^2)^{3/2}} \cdot \left(-\frac{1}{t^2}\right)\mathrm{d}t = \int_{a^{-1}}^{b^{-1}} \frac{-t}{(1 + t^2)^{3/2}}\,\mathrm{d}t,$$

得證。

第 (ii) 部分

(a) 取 $a = \frac{1}{2}$、$b = 2$，新的積分限是 2 和 $\frac{1}{2}$。把上下限對調便可吸收負號：

$$\int_{1/2}^{2} \frac{1}{(1 + x^2)^{3/2}}\,\mathrm{d}x = \int_{1/2}^{2} \frac{t}{(1 + t^2)^{3/2}}\,\mathrm{d}t.$$

新的被積函數是 $1+t^2$ 某個冪的導數（derivative）（的倍數）：由於 $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(1+t^2)^{-1/2} = -t(1+t^2)^{-3/2}$，

$$\int_{1/2}^{2} \frac{t}{(1+t^2)^{3/2}}\,\mathrm{d}t = \Big[-(1+t^2)^{-1/2}\Big]_{1/2}^{2} = -\frac{1}{\sqrt{5}} + \frac{1}{\sqrt{5/4}} = -\frac{1}{\sqrt{5}} + \frac{2}{\sqrt{5}} = \frac{1}{\sqrt{5}}.$$

(b) 被積函數是偶函數（even function），所以在 $[-2,2]$ 上的積分是在 $[0,2]$ 上積分的兩倍。把後者拆成 $[0,\frac{1}{2}]\cup[\frac{1}{2},2]$；第二段就是 (a) 部分。

> **想一想** 第 (i) 部分要求 $a>0$。從 0 開始的那一段該怎樣處理？

先在 $[a,\frac{1}{2}]$ 上處理，其中 $0<a<\frac{1}{2}$，這時第 (i) 部分適用；然後令 $a\to 0^+$。在第 (i) 部分取 $b=\frac{1}{2}$，得

$$\int_{a}^{1/2} \frac{1}{(1+x^2)^{3/2}}\,\mathrm{d}x = \int_{2}^{1/a} \frac{t}{(1+t^2)^{3/2}}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{\sqrt{5}} - \frac{1}{\sqrt{1+a^{-2}}}.$$

當 $a\to 0^+$ 時，$a^{-2}\to\infty$，最後一項趨於 0。左邊趨於在 $[0,\frac{1}{2}]$ 上的積分，因為被積函數在該處連續。所以這一段同樣等於 $\frac{1}{\sqrt{5}}$，從而

$$\int_{-2}^{2} \frac{1}{(1+x^2)^{3/2}}\,\mathrm{d}x = 2\Big(\frac{1}{\sqrt{5}} + \frac{1}{\sqrt{5}}\Big) = \frac{4}{\sqrt{5}}.$$

第 (iii) 部分

(a) 記 $J=\int_{1/2}^{2} \frac{1}{(1+x^2)^2}\,\mathrm{d}x$，再次使用 $x=1/t$。此時 $(1+x^2)^2 = (1+t^2)^2/t^4$，所以

$$J = \int_{2}^{1/2} \frac{t^4}{(1+t^2)^2}\cdot\Big(-\frac{1}{t^2}\Big)\mathrm{d}t = \int_{1/2}^{2} \frac{t^2}{(1+t^2)^2}\,\mathrm{d}t,$$

把啞變量（dummy variable）t 改名為 x 後，這就是第一個等式。把這第二個積分記作 K，於是 $J=K$。把兩個被積函數相加，

$$J+K = \int_{1/2}^{2} \frac{1+x^2}{(1+x^2)^2}\,\mathrm{d}x = \int_{1/2}^{2} \frac{1}{1+x^2}\,\mathrm{d}x,$$

由於 $J=K$，得 $J=\frac{1}{2}\int_{1/2}^{2} \frac{1}{1+x^2}\,\mathrm{d}x$，等式鏈便完成了。

因此

$$J = \tfrac{1}{2}(\arctan 2 - \arctan\tfrac{1}{2}).$$

這個結果可用以下兩種方法之一化簡。由於 $\arctan 2 + \arctan\frac{1}{2} = \frac{\pi}{2}$（兩直角邊為 1 和 2 的直角三角形中的兩個餘角（complementary angles））得 $J=\frac{\pi}{4} - \arctan\frac{1}{2}$。又或者，

用 tan 的減法公式，$\tan(\arctan 2 - \arctan\frac{1}{2}) = \dfrac{2-\frac{1}{2}}{1+1} = \frac{3}{4}$，而這個差位於 $(0, \frac{\pi}{2})$ 之內，所以

$$\int_{1/2}^{2} \frac{1}{(1+x^2)^2}\,\mathrm{d}x = \tfrac{1}{2}\arctan\tfrac{3}{4} \approx 0.3218.$$

(b) 設 L 為所求的積分。在動用難求的原函數（antiderivative）之前，不妨再試一次 $x = 1/t$。被積函數變成

$$\frac{1-\frac{1}{t}}{\frac{1}{t}\sqrt{\frac{1+t^2}{t^2}}} = \frac{\frac{t-1}{t}}{\frac{\sqrt{1+t^2}}{t^2}} = \frac{t(t-1)}{\sqrt{1+t^2}},$$

這裏再次用到 $t > 0$。乘以 $\mathrm{d}x = -\frac{1}{t^2}\,\mathrm{d}t$，並注意積分限由 2 到 $\frac{1}{2}$，

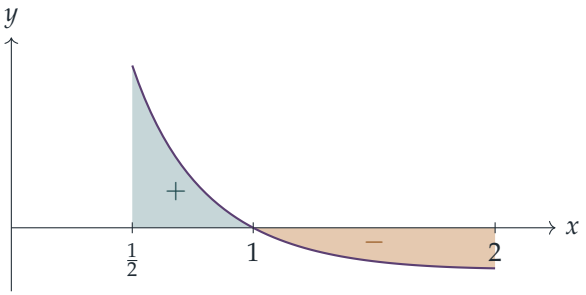
$$L = \int_{2}^{1/2} \frac{-(t-1)}{t\sqrt{1+t^2}}\,\mathrm{d}t = \int_{1/2}^{2} \frac{t-1}{t\sqrt{1+t^2}}\,\mathrm{d}t = -\int_{1/2}^{2} \frac{1-t}{t\sqrt{1+t^2}}\,\mathrm{d}t = -L.$$

想一想 代換把 L 變成了 $-L$。這是矛盾嗎？

不是：它正好告訴我們積分的值。由 $L = -L$ 得 $2L = 0$，所以

$$\int_{1/2}^{2} \frac{1-x}{x(1+x^2)^{1/2}}\,\mathrm{d}x = 0.$$

圖像也吻合：$[\frac{1}{2}, 1]$ 上的正面積恰好抵消 $[1, 2]$ 上的負面積，因為 $x \mapsto 1/x$ 把這兩段互換，而且由上面的推導可知，它把其中一段的面積變成另一段面積的相反數。



驗算

- $(1+x^2)^{-3/2}$ 的一個原函數是 $x(1+x^2)^{-1/2}$（求導即可驗證）。用它計算，(ii)(a) 得 $\frac{2}{\sqrt{5}} - \frac{1}{\sqrt{5}} = \frac{1}{\sqrt{5}} \approx 0.4472$，(ii)(b) 得 $\frac{4}{\sqrt{5}} \approx 1.7889$，與我們的答案一致。
- 在 (iii)(a) 中，$\frac{1}{2}\arctan\frac{3}{4} \approx 0.32175$ 與 $\frac{\pi}{4} - \arctan\frac{1}{2} \approx 0.32175$ 相符。對等式鏈中三個積分進行數值積分（numerical quadrature），都得到相同的值。
- 在 (iii)(b) 中，被積函數在 $x < 1$ 時為正，在 $x > 1$ 時為負，所以答案為零是合理的。數值積分在捨入誤差範圍內得到 0。

常見錯誤

- 漏掉 $\mathrm{d}x = -t^{-2}\,\mathrm{d}t$ 中的負號，或忘記對調積分上下限會把它抵消。
- 在 (ii)(b) 中直接以 $a = 0$ 套用第 (i) 部分，這需要積分限 $t = 1/0$。應該取極限，或者乾脆用原函數。
- 寫 $\sqrt{(1+t^2)/t^2} = \sqrt{1+t^2}/t$ 時沒有指出這需要 $t > 0$。

STEP 之外

映射 $x \mapsto 1/x$ 是區間 $[\frac{1}{2}, 2]$ 的一種對稱性（symmetry），而利用積分的對稱性是一個反覆出現的技巧，例如藉 $x \mapsto \frac{\pi}{2} - x$ 計算 $\int_0^{\pi/2} \ln \sin x \,\mathrm{d}x$。第 (ii)(b) 部分讓你初嘗瑕積分（improper integral）：代換把一個有限的端點送到無窮遠，我們必須小心地取極限。Abbott 的 *Understanding Analysis*（《理解分析》）嚴謹地處理積分的極限，而 Siklos 的 *Advanced Problems in Mathematics*（《高等數學難題》）則有更多 STEP 風格的積分練習。

Beyond STEP 詳細解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hant/。解答文字採用 CC0 1.0；題目本身版權屬 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予轉載。由機器從英文翻譯而成；尚未經審閱。