詳細解答

STEP III 2022，第 9 題

力學 • 碰撞與恢復係數

> **STEP III 2022，第 9 題**
>
> 繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 OCR 提供下載的 2022 年 STEP 試卷（zip 檔案）內的 STEP III 試卷：
>
> www.ocr.org.uk/Images/696587-2022-past-papers.zip

關鍵思路

這裏每一次碰撞其實都是同一種碰撞：一個運動中的質點撞向一個靜止、質量為其 k 倍的質點。因此第 (i) 部分開頭求出的因子 α 和 β 可以在第 (ii) 部分重用，因為在那裏 B（質量 km）撞向 C（質量 k^2m）。之後，每個「在同一點相遇」的條件，都只不過是把同一時刻的兩個表達式設為相等。在第 (ii) 部分我們會得到兩條關於 k 和 e 的方程，而其中一條原來正正就是第 (i) 部分的條件。

解答

我們把 A、B、C 視為在光滑表面上沿同一直線運動的質點，而碰撞是瞬時的。所有速度均以 A 初始運動的方向為正方向。

第 (i) 部分

第一次碰撞。動量（momentum）守恆，而牛頓恢復定律（Newton's law of restitution）指出分離速率等於接近速率的 e 倍：

$$mu = mv_1 + kmv_2, \qquad v_2 - v_1 = eu.$$

把 $v_1 = v_2 - eu$ 代入第一條方程，得 $u = v_2 - eu + kv_2$，因此

$$v_2 = \frac{1+e}{k+1}u = \beta u, \qquad v_1 = \frac{1+e}{k+1}u - eu = \frac{1+e-ek-e}{k+1}u = \frac{1-ke}{k+1}u = \alpha u,$$

即為所求。

第二次碰撞。由第一次碰撞起計時。B 用時 $D/(\beta u)$ 走完到牆壁的距離 D。它以速率 $e\beta u$ 反彈，所以再用時 $D/(2e\beta u)$ 往碰撞點方向走回 $\frac{1}{2}D$。若第二次碰撞在那裏發生，則

發生時刻為

$$T = \frac{D}{\beta u}\left(1 + \frac{1}{2e}\right) = \frac{(2e+1)D}{2e\beta u}.$$

該點距離牆壁 $\frac{1}{2}D$，因此它同時位於第一次碰撞點之後 $\frac{1}{2}D$ 處。A 以恆定速度 αu 運動，所以必須有 $\alpha > 0$ 及 $\alpha u T = \frac{1}{2}D$：

$$\alpha \frac{(2e+1)D}{2e\beta} = \frac{D}{2} \quad \Longleftrightarrow \quad \alpha(2e+1) = e\beta.$$

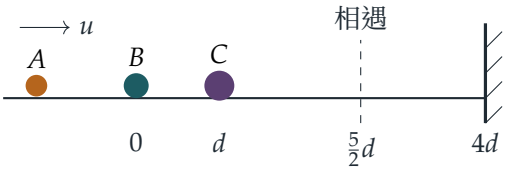
兩邊乘以 $k+1$，得 $(1-ke)(2e+1) = e(1+e)$，因此

$$ke(2e+1) = (2e+1) - e - e^2 = 1 + e - e^2 \quad \Longrightarrow \quad k = \frac{1+e-e^2}{e(2e+1)},$$

這就是所求的結果。這個值確實給出 $\alpha > 0$：它使 $ke = \frac{1+e-e^2}{2e+1}$，而由於當 $e > 0$ 時 $1 + e - e^2 < 1 + 2e$，此值小於 1。

第 (ii) 部分

把原點設在 B 的起點，使 C 從 $x = d$ 出發，而牆壁位於 $x = 4d$。所要求的相遇點距離牆壁 $\frac{3}{2}d$，即位於 $x = \frac{5}{2}d$。



設 A 撞上 B 的一刻為 $t = 0$。這次碰撞與第 (i) 部分的完全相同，所以碰撞後 A 的速度為 αu，B 的速度為 βu，其中 α 和 β 與之前相同。

想一想 B 撞上 C 時會發生甚麼？我們需要重做碰撞的代數運算嗎？

不需要。C 靜止，而它的質量 $k^2 m$ 是 B 的質量 km 的 k 倍。所以這又是第 (i) 部分的碰撞，質量比同樣是 k，e 相同，只是入射速率由 u 變成 βu。B 在時刻 $t_1 = d/(\beta u)$ 撞上 C。碰撞後 B 的速度為 $\alpha\beta u$，C 的速度為 $\beta^2 u$。

現在我們計算每個質點何時到達 $x = \frac{5}{2}d$，並假設在此之前沒有其他碰撞發生（我們會在最後驗證這一點）。

- A 從 $x = 0$ 以 αu 運動，所以在 $t = \dfrac{5d}{2\alpha u}$ 到達。
- B 在 t_1 到達 $x = d$，然後以速率 $\alpha\beta u$ 走 $\frac{3}{2}d$。它在 $t = \dfrac{d}{\beta u} + \dfrac{3d}{2\alpha\beta u}$ 到達。

► C 以 $\beta^2 u$ 走 $3d$ 到牆壁，再以 $e\beta^2 u$ 往回走 $\frac{3}{2}d$。它到達的時刻為

$$t = \frac{d}{\beta u} + \frac{3d}{\beta^2 u}\left(1 + \frac{1}{2e}\right) = \frac{d}{\beta u} + \frac{3(2e+1)d}{2e\beta^2 u}.$$

要發生同時碰撞，三個時刻必須相等。

B 與 C。消去公共項 $d/(\beta u)$，再乘以 $2\beta^2 u/(3d)$：

$$\frac{1}{\alpha}\beta = \frac{2e+1}{e} \quad \Longleftrightarrow \quad e\beta = \alpha(2e+1).$$

這正正是第 (i) 部分的條件，所以

$$k = \frac{1+e-e^2}{e(2e+1)}. \tag{1}$$

（這並非巧合。在兩種情況下，都是一個質點離開碰撞後，以入射速率的 β 倍走 D 到牆壁，再折返 $\frac{1}{2}D$；與此同時，另一個質點以入射速率的 α 倍向前走 $\frac{1}{2}D$。這裏 $D = 3d$，而入射速率為 βu。）

A 與 B。把 $\dfrac{5}{2\alpha} = \dfrac{1}{\beta} + \dfrac{3}{2\alpha\beta}$ 乘以 $2\alpha\beta$，得 $5\beta = 2\alpha + 3$。再乘以 $k+1$：

$$5(1+e) = 2(1-ke) + 3(k+1) \quad \Longrightarrow \quad 5e = k(3-2e) \quad \Longrightarrow \quad k = \frac{5e}{3-2e}. \tag{2}$$

想一想 我們有兩個 k 的表達式。怎樣求出 e？

令 (1) 與 (2) 相等。由於 $0 < e < 1$，兩個分母都是正數，所以可以交叉相乘：

$$\begin{aligned} 5e^2(2e+1) &= (3-2e)(1+e-e^2) \\ 10e^3 + 5e^2 &= 3 + e - 5e^2 + 2e^3 \\ 0 &= 8e^3 + 10e^2 - e - 3. \end{aligned}$$

試代 $e = \frac{1}{2}$，得 $1 + \frac{5}{2} - \frac{1}{2} - 3 = 0$，所以 $2e-1$ 是一個因式：

$$8e^3 + 10e^2 - e - 3 = (2e-1)(4e^2 + 7e + 3) = (2e-1)(4e+3)(e+1).$$

其餘的根 $-\frac{3}{4}$ 和 -1 都是負數，所以滿足 $0 < e < 1$ 的唯一根是 $e = \frac{1}{2}$，即為所求。於是 $k = \frac{5}{4}$。

驗證情境是否自洽。當 $e = \frac{1}{2}$、$k = \frac{5}{4}$ 時，得 $\alpha = \frac{1}{6}$ 及 $\beta = \frac{2}{3}$。在 B 撞上 C 之前，A（速率 $\frac{1}{6}u$）比 B（速率 $\frac{2}{3}u$）慢，所以不能提早追上 B。之後，B（速率 $\frac{1}{9}u$）比 C（速率 $\frac{4}{9}u$）慢，所以 B 不能在 C 到達牆壁前追上 C。這時 B 比 A 慢，所以 A 逐漸追近 B，而它們只在我們算出的那一點相遇。因此不會有額外的碰撞，三個質點都在 $t = 15d/u$ 時到達 $x = \frac{5}{2}d$。

驗算

- 在第 (i) 部分，$v_1 + kv_2 = u$（動量）及 $v_2 - v_1 = eu$（恢復係數）。若 $e = 1$ 且 $k = 1$，則 $\alpha = 0$ 及 $\beta = 1$：在完全彈性碰撞中，質量相等的兩個質點互換速度，理應如此。
- 在第 (ii) 部分，取 $u = d = 1$ 及上述數值，三個到達時刻分別為：A 是 $\frac{5/2}{1/6} = 15$，B 是 $\frac{1}{2/3} + \frac{3/2}{1/9} = \frac{3}{2} + \frac{27}{2} = 15$，$C$ 是 $\frac{3}{2} + \frac{3}{4/9} + \frac{3/2}{2/9} = \frac{3}{2} + \frac{27}{4} + \frac{27}{4} = 15$。
- 公式 (1) 在 $e = \frac{1}{2}$ 時給出 $k = \frac{5/4}{1} = \frac{5}{4}$，與 (2) 一致：$\frac{5/2}{2} = \frac{5}{4}$。

常見錯誤

- 在第 (i) 部分，應該由碰撞點量度相遇點，卻由牆壁量度。在這裏兩者恰巧相同，都是 $\frac{1}{2}D$；但在第 (ii) 部分，距離牆壁 $\frac{3}{2}d$ 的相遇點，距離 B 的起點是 $\frac{5}{2}d$。
- 從頭重做 B–C 的碰撞而漏了一個因子。留意到質量比再次是 k，便可省去這些功夫。
- 忘記 C 從牆壁反彈後的速率是 $e\beta^2 u$，而不是 $\beta^2 u$。

STEP 之外

這道題之所以行得通，是因為問題具有*自相似性*（self-similar）：把質量乘以 k、速率乘以 β，就把一次碰撞變成下一次碰撞，所以同一套代數運算會重複出現。同樣的想法也出現在質量按幾何級數遞減的一串球之中——這樣的球串能非常有效地把能量傳遞下去；它亦是著名的「用碰撞方塊數出 π」問題背後的道理，而該問題在速度空間中、以動量和能量作為約束來分析最為簡潔。Kleppner 和 Kolenkow 的 *An Introduction to Mechanics*（《力學導論》）有系統地處理碰撞問題，包括在質心參考系（centre-of-mass frame）中進行分析，這使得像 α 和 β 這樣的公式一目了然。

Beyond STEP 詳細解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hant/。解答文字採用 CC0 1.0；題目本身版權屬 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予轉載。由機器從英文翻譯而成；尚未經審閱。