詳細解答

STEP III 2022，第 8 題

純數學 • 棣美弗定理與無理性

STEP III 2022，第 8 題

繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 OCR 提供下載的 2022 年 STEP 試卷（zip 檔案）內的 STEP III 試卷：

www.ocr.org.uk/Images/696587-2022-past-papers.zip

本題在 *Beyond STEP* 第 5.5 節名不副實的有理角中有完整的引導式講解：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hant/ch05/rational-angles.html

關鍵思路

把 $\cos\theta$ 提出後套用棣美弗定理（De Moivre's theorem），可將 $\sin k\theta$ 和 $\cos k\theta$ 表示為 $\cos^k\theta$（或 $\sin\theta\cos^{k-1}\theta$）乘以一個關於 $\tan^2\theta = \sec^2\theta - 1$ 的多項式（polynomial）。當 $\sec^2\theta - 1$ 是偶整數時，該多項式的值是一個整數，而它的奇偶性（parity）可以從首項直接讀出。若角度（以度為單位）是有理數（rational），某個 $\sin k\theta$ 便會等於零，而奇偶性論證說明這種情況永遠不會發生。

解答

第 (i) 部分

假設 $\cos\theta \neq 0$，使 $\sec\theta$ 存在。由棣美弗定理，

$$\cos k\theta + \mathrm{i}\sin k\theta = (\cos\theta + \mathrm{i}\sin\theta)^k = \cos^k\theta\,(1+\mathrm{i}t)^k, \qquad t = \tan\theta.$$

按二項式展開（binomial expansion），$(1+\mathrm{i}t)^k = \sum_{j=0}^{k}\binom{k}{j}\mathrm{i}^j t^j$。$j$ 為奇數的項是虛數，且 $\mathrm{i}^{2r+1} = (-1)^r\mathrm{i}$；$j$ 為偶數的項是實數，且 $\mathrm{i}^{2r} = (-1)^r$。取虛部（imaginary part），

$$\begin{aligned}\sin k\theta &= \cos^k\theta\left(\binom{k}{1}t - \binom{k}{3}t^3 + \binom{k}{5}t^5 - \cdots\right)\\ &= \cos^k\theta\,\tan\theta\left(k - \binom{k}{3}t^2 + \binom{k}{5}t^4 - \cdots\right).\end{aligned}$$

由於 $\cos^k\theta\tan\theta = \sin\theta\cos^{k-1}\theta$ 及 $t^2 = \tan^2\theta = \sec^2\theta - 1$，上式即為

$$\sin k\theta = \sin\theta\cos^{k-1}\theta\left(k - \binom{k}{3}(\sec^2\theta - 1) + \binom{k}{5}(\sec^2\theta - 1)^2 - \cdots\right),$$

此即所求。括號會自然終止，因為當 $j > k$ 時 $\binom{k}{j} = 0$。同樣地取實部，

$$\cos k\theta = \cos^k\theta\left(1 - \binom{k}{2}(\sec^2\theta - 1) + \binom{k}{4}(\sec^2\theta - 1)^2 - \cdots\right).$$

第 (ii) 部分

此處 $\cos\theta = 1/a$ 且 $a \geq 3$，故 $0° < \theta < 90°$。特別地，$\sin\theta \neq 0$ 且 $\cos\theta \neq 0$。此外 $\sec^2\theta - 1 = a^2 - 1$，由於 a 是奇數，這是一個 偶整數。記 $X = a^2 - 1$。

假設 k 是使 $\sin k\theta = 0$ 的最小正整數。那麼 $k \neq 1$，因為 $\sin\theta \neq 0$，所以 $k > 1$，可應用第 (i) 部分：

$$0 = \sin k\theta = \sin\theta\cos^{k-1}\theta\left(k - \binom{k}{3}X + \binom{k}{5}X^2 - \cdots\right).$$

因子 $\sin\theta\cos^{k-1}\theta$ 不為零，所以括號等於零。首項以外的每一項都至少含有一個偶整數 X 的因子，而二項式係數（binomial coefficient）都是整數，所以

$$0 = k - \binom{k}{3}X + \binom{k}{5}X^2 - \cdots \equiv k \pmod 2.$$

因此 k 是偶數。於是

$$0 = \sin k\theta = 2\sin\left(\tfrac{1}{2}k\theta\right)\cos\left(\tfrac{1}{2}k\theta\right).$$

但 $\frac{1}{2}k$ 是整數且 $0 < \frac{1}{2}k < k$，所以由 k 的最小性（minimality），$\sin(\frac{1}{2}k\theta) \neq 0$。因此 $\cos(\frac{1}{2}k\theta) = 0$，此即所求。

想一想 「θ 是有理數」這個假設在哪裏用上？

正是它令 k 得以存在。設 $\theta = p/q$，其中 p、q 為正整數（記住 θ 以度為單位）。那麼 $180q\,\theta = 180p$，故 $\sin(180q\,\theta) = 0$。所以*確實*存在正整數 m 使 $\sin m\theta = 0$，因此也存在最小的一個，記為 k。它滿足上述假設，所以 k 是偶數；記 $n = \frac{1}{2}k$，便有 $\cos n\theta = 0$。

現在證明 $\cos n\theta$ 不可能為零。若 $n = 1$，則 $\cos n\theta = 1/a \neq 0$。若 $n > 1$，第 (i) 部分的餘弦公式給出

$$\cos n\theta = \frac{1}{a^n}\left(1 - \binom{n}{2}X + \binom{n}{4}X^2 - \cdots\right).$$

同樣，首項以外的每一項都是偶數，所以括號是一個奇整數，特別地不為零。故 $\cos n\theta \neq 0$，矛盾。因此 θ 是無理數（irrational）。

第 (iii) 部分

現在 $\cot\phi = 1/b$，所以 $\tan\phi = b$，其中 $b \geq 2$，且 $0° < \phi < 90°$。同樣 $\sin\phi \neq 0$ 且 $\cos\phi \neq 0$，而這次

$$\sec^2\phi - 1 = \tan^2\phi = b^2,$$

由於 b 是偶數，這是一個偶整數。所以只要以 $X = b^2$ 代替 $a^2 - 1$，第 (ii) 部分的論證便完全適用。完整寫出如下：

設 $\phi = p/q$，其中 p、q 為正整數。那麼 $\sin(180q\,\phi) = 0$，所以存在最小的正整數 k 使 $\sin k\phi = 0$，而由於 $\sin\phi \neq 0$，$k > 1$。由第 (i) 部分，因為 $\sin\phi\cos^{k-1}\phi \neq 0$，

$$0 = k - \binom{k}{3}b^2 + \binom{k}{5}b^4 - \cdots \equiv k \pmod 2,$$

所以 k 是偶數。於是 $0 = \sin k\phi = 2\sin(\frac{1}{2}k\phi)\cos(\frac{1}{2}k\phi)$，而由最小性，$\sin(\frac{1}{2}k\phi) \neq 0$，所以 $\cos n\phi = 0$，其中 $n = \frac{1}{2}k$。若 $n = 1$，這表示 $\cos\phi = 0$，但這是錯的。若 $n > 1$，

$$\cos n\phi = \cos^n\phi\left(1 - \binom{n}{2}b^2 + \binom{n}{4}b^4 - \cdots\right),$$

其中 $\cos^n\phi \neq 0$，而括號是奇數，故不為零。這個矛盾說明 ϕ 是無理數。

驗算

- 在第 (i) 部分代入 $k = 2$ 及 $k = 3$：公式給出 $\sin 2\theta = 2\sin\theta\cos\theta$、$\cos 2\theta = \cos^2\theta - \sin^2\theta$ 及 $\sin 3\theta = \sin\theta(3\cos^2\theta - \sin^2\theta) = 3\sin\theta - 4\sin^3\theta$。對於不超過 15 的 k，兩條公式在隨機角度下也與直接計算的結果吻合。
- 奇偶條件是必要的。取 $a = 2$（偶數）得 $\theta = 60°$，取 $b = 1$（奇數）得 $\phi = 45°$，兩者都是有理數。在這兩種情況下，$X = 3$ 或 1 都是奇數，所以論證恰好在應該失效的地方失效。
- 當 $a = 3$ 時 $\theta \approx 70.5288°$，當 $b = 2$ 時 $\phi \approx 63.4349°$。電腦驗算確認，對於所有小於 30 的奇數 a 及偶數 b，以及每個 $k < 2000$，$\sin k\theta$ 和 $\sin k\phi$ 都與零保持相當距離。

常見錯誤

- 在約去 $\sin\theta\cos^{k-1}\theta$ 之前，沒有說明為何它 $\neq 0$。
- 沒有解釋 k 從何而來：最小的 k 之所以存在，只是因為有理數 θ 令 $\sin(180q\,\theta) = 0$。
- 沒有利用 k 的最小性排除 $\sin(\frac{1}{2}k\theta) = 0$，便斷定 $\cos(\frac{1}{2}k\theta) = 0$。

STEP 之外

撇除前面的因子，這裏的括號就是*切比雪夫多項式*（Chebyshev polynomials），而奇偶性技巧則是把整數恆等式模一個質數（reducing modulo a prime）來處理的初步體驗。一個著名的相關結果是 *Niven 定理*（Niven's theorem）：在 180° 的有理數倍 θ 之中，使 $\cos\theta$ 為有理數的只有滿足 $\cos\theta \in \{0, \pm\frac{1}{2}, \pm 1\}$ 的那些。其證明方法是證明 $2\cos\theta$ 是一個代數整數（algebraic integer）。Davenport 的 *The Higher Arithmetic*（《高等算術》）是建立這類論證背後的數論基礎的好起點。

Beyond STEP 詳細解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hant/。解答文字採用 CC0 1.0；題目本身版權屬 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予轉載。由機器從英文翻譯而成；尚未經審閱。