詳細解答

STEP III 2022，第 7 題

純數學 • 向量積變換

STEP III 2022，第 7 題

繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 OCR 提供下載的 2022 年 STEP 試卷（zip 檔案）內的 STEP III 試卷：

www.ocr.org.uk/Images/696587-2022-past-papers.zip

本題在 *Beyond STEP* 第 7.5 節三維空間中的旋轉中有完整的引導式講解：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hant/ch07/rotations-3d.html

關鍵思路

一切都建基於把一個向量（vector）分解為沿 $\mathbf{n}$ 的部分和垂直（perpendicular）於 $\mathbf{n}$ 的部分。映射（map）$\mathbf{r} \mapsto \mathbf{n} \times \mathbf{r}$ 會消去平行部分，並把垂直部分繞 $\mathbf{n}$ 轉過一個直角，而不改變其長度。第 (i) 部分一旦證明了連續施行這個映射兩次會得到垂直部分的負值，第 (ii) 和 (iii) 部分的映射便可以逐一觀察它們分別對這兩個部分的作用而直接讀出。

解答

第 (i) 部分

設 $\mathbf{n} = (a, b, c)^{\mathsf{T}}$ 及 $\mathbf{r} = (x, y, z)^{\mathsf{T}}$，則

$$\mathrm{f}(\mathbf{r}) = \mathbf{n} \times \mathbf{r} = \begin{pmatrix} bz - cy \\ cx - az \\ ay - bx \end{pmatrix}.$$

再施行 f 一次，$\mathbf{n} \times \mathrm{f}(\mathbf{r})$ 的 x 分量（component）等於 b 乘以 $\mathrm{f}(\mathbf{r})$ 的第三個分量，減去 c 乘以第二個分量：

$$\begin{aligned} b(ay - bx) - c(cx - az) &= aby - b^2x - c^2x + acz \\ &= -x(b^2 + c^2) + aby + acz, \end{aligned}$$

此即所求。由於 $\mathbf{n}$ 是單位向量（unit vector），$b^2+c^2=1-a^2$，所以上式變成

$$-x+a^2x+aby+acz=a(ax+by+cz)-x=(\mathbf{n}\cdot\mathbf{r})\,a-x.$$

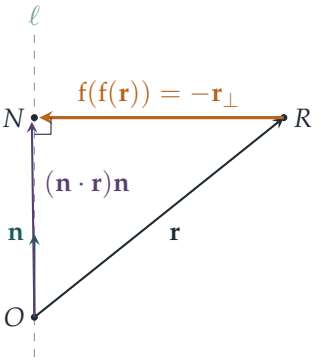
這正是 $(\mathbf{n}\cdot\mathbf{r})\mathbf{n}-\mathbf{r}$ 的 x 分量。由於叉積（cross product）在這種循環重新標記下保持不變，只要循環替換 $a\to b\to c\to a$ 及 $x\to y\to z\to x$，便可同樣得出 y 分量和 z 分量。因此

$$\mathrm{f}(\mathrm{f}(\mathbf{r}))=(\mathbf{n}\cdot\mathbf{r})\mathbf{n}-\mathbf{r}.$$

幾何意義。寫 $\mathbf{r}=\mathbf{r}_{\parallel}+\mathbf{r}_{\perp}$，其中 $\mathbf{r}_{\parallel}=(\mathbf{n}\cdot\mathbf{r})\mathbf{n}$ 是沿 $\mathbf{n}$ 的分量，而 $\mathbf{r}_{\perp}=\mathbf{r}-(\mathbf{n}\cdot\mathbf{r})\mathbf{n}$ 垂直於 $\mathbf{n}$。於是

$$\mathrm{f}(\mathrm{f}(\mathbf{r}))=-\mathbf{r}_{\perp}.$$

設 ℓ 為通過 O 而方向為 $\mathbf{n}$ 的直線，並設 N 為由 R 到 ℓ 的垂足（foot of the perpendicular），故 $\overrightarrow{ON}=\mathbf{r}_{\parallel}$。於是 $\mathrm{f}(\mathrm{f}(\mathbf{r}))=\overrightarrow{ON}-\overrightarrow{OR}=\overrightarrow{RN}$：它是由 R 垂直地直指軸 ℓ 的向量，其長度就是 R 與 ℓ 的距離。



第 (ii) 部分

軸。由於 $\mathbf{n}\times\mathbf{n}=\mathbf{0}$，我們有 $\mathrm{f}(\mathbf{n})=\mathbf{0}$，因而 $\mathrm{f}(\mathrm{f}(\mathbf{n}))=\mathbf{0}$，得 $\mathrm{g}(\mathbf{n})=\mathbf{n}$。由線性（linearity）得 $\mathrm{g}(\lambda\mathbf{n})=\lambda\mathbf{n}$，所以直線 ℓ 上每一點都是不動點（fixed point）。

垂直向量。現在取滿足 $\mathbf{n}\cdot\mathbf{r}=0$ 的 $\mathbf{r}$。由第 (i) 部分，$\mathrm{f}(\mathrm{f}(\mathbf{r}))=-\mathbf{r}$，所以

$$\mathrm{g}(\mathbf{r})=\mathbf{r}+\sin\theta\,(\mathbf{n}\times\mathbf{r})-(1-\cos\theta)\mathbf{r}=\cos\theta\,\mathbf{r}+\sin\theta\,(\mathbf{n}\times\mathbf{r}).$$

想一想 當 $\mathbf{r}\perp\mathbf{n}$ 時，$\mathbf{n}\times\mathbf{r}$ 是怎樣的？

它同時垂直於 $\mathbf{n}$ 和 $\mathbf{r}$，所以它位於通過 O 且垂直於 $\mathbf{n}$ 的平面上，並與 $\mathbf{r}$ 成直角。它的長度是 $|\mathbf{n}||\mathbf{r}|\sin 90^\circ=|\mathbf{r}|$。因此 $\mathbf{r}$ 與 $\mathbf{n}\times\mathbf{r}$ 是該平面上兩個互相垂直、長度相等的向量，而 $\mathbf{n}\times\mathbf{r}$ 就是把 $\mathbf{r}$ 繞 $\mathbf{n}$ 按右手方向（right-handed sense）轉過 90° 的結果（即從

$\mathbf{n}$ 的末端回望 O 時的逆時針方向）。正如 $\cos\theta\,\mathbf{i}+\sin\theta\,\mathbf{j}$ 是把 $\mathbf{i}$ 朝 $\mathbf{j}$ 旋轉 θ 所得，向量 $\cos\theta\,\mathbf{r}+\sin\theta\,(\mathbf{n}\times\mathbf{r})$ 就是把 $\mathbf{r}$ 繞 $\mathbf{n}$ 按同一方向旋轉 θ 所得。

一般向量。f 是線性的（叉積對第二個自變量是線性的），所以 g 也是線性的。把一般的 $\mathbf{r}$ 寫成 $\mathbf{r}_\parallel+\mathbf{r}_\perp$，g 保持 $\mathbf{r}_\parallel$ 不變，並把 $\mathbf{r}_\perp$ 繞 $\mathbf{n}$ 旋轉 θ，這正是繞 ℓ 的旋轉所做的事。

因此 $R\mapsto P$ 是一個**繞通過 O、方向為 $\mathbf{n}$ 的直線旋轉 θ 角的旋轉（rotation）**，方向為繞 $\mathbf{n}$ 的右手方向（即從 $\mathbf{n}$ 的末端望向 O 時的逆時針方向）。

第 (iii) 部分

利用第 (i) 部分，

$$\mathrm{h}(\mathbf{r})=-\mathbf{r}-2\big((\mathbf{n}\cdot\mathbf{r})\mathbf{n}-\mathbf{r}\big)=\mathbf{r}-2(\mathbf{n}\cdot\mathbf{r})\mathbf{n}.$$

以兩個分量表示，$\mathrm{h}(\mathbf{r})=\mathbf{r}_\perp-\mathbf{r}_\parallel$：

- $\mathrm{h}(\mathbf{n})=\mathbf{n}-2\mathbf{n}=-\mathbf{n}$，所以沿 $\mathbf{n}$ 的分量被反轉；
- 若 $\mathbf{n}\cdot\mathbf{r}=0$，則 $\mathrm{h}(\mathbf{r})=\mathbf{r}$，所以平面 $\mathbf{n}\cdot\mathbf{r}=0$ 上每一點都是不動點。

從幾何上看，$\overrightarrow{RQ}=-2(\mathbf{n}\cdot\mathbf{r})\mathbf{n}$ 垂直於平面 $\Pi:\ \mathbf{n}\cdot\mathbf{r}=0$，而 RQ 的中點的位置向量（position vector）是 $\mathbf{r}-(\mathbf{n}\cdot\mathbf{r})\mathbf{n}$，它位於 Π 上。所以 Q 是 R 的鏡像：映射 $R\mapsto Q$ 是**對通過 O 且垂直於 $\mathbf{n}$ 的平面的反射（reflection）**。

驗算

- 取 $\mathbf{n}=\mathbf{k}=(0,0,1)^{\mathsf{T}}$。則 $\mathbf{n}\times\mathbf{r}=(-y,x,0)^{\mathsf{T}}$，施行兩次得 $(-x,-y,0)^{\mathsf{T}}$，與 $(\mathbf{n}\cdot\mathbf{r})\mathbf{n}-\mathbf{r}=(0,0,z)^{\mathsf{T}}-(x,y,z)^{\mathsf{T}}$ 吻合。於是 $\mathrm{g}(\mathbf{r})=(x\cos\theta-y\sin\theta,\ x\sin\theta+y\cos\theta,\ z)^{\mathsf{T}}$，正是我們熟悉的繞 z 軸的旋轉；而 $\mathrm{h}(\mathbf{r})=(x,y,-z)^{\mathsf{T}}$，是對平面 $z=0$ 的反射。
- $\theta=0$ 給出 $\mathrm{g}(\mathbf{r})=\mathbf{r}$，而施行 h 兩次得到恆等映射（identity），這正符合「轉零角度的旋轉」和反射應有的性質。
- 以 2000 組隨機的單位向量 $\mathbf{n}$、向量 $\mathbf{r}$ 和角 θ 進行電腦驗算，證實了 x 分量的公式、$\mathrm{f}(\mathrm{f}(\mathbf{r}))$ 的恆等式、g 與繞 $\mathbf{n}$ 按右手方向旋轉 θ 一致，以及 h 與對平面 $\mathbf{n}\cdot\mathbf{r}=0$ 的反射一致。

常見錯誤

- 忘記使用 $a^2+b^2+c^2=1$：若 $\mathbf{n}$ 不是單位向量，(i) 中的恆等式並不成立。
- 在 (ii) 中只驗證了 $\mathbf{r}\perp\mathbf{n}$ 的情況，卻沒有解釋為何這一點連同 $\mathrm{g}(\mathbf{n})=\mathbf{n}$ 及線性，便

足以處理所有 $\mathbf{r}$。

- 把 (iii) 說成是對直線 ℓ 的反射：ℓ 上的點是被反轉，而不是保持不動；保持不動的是垂直於 $\mathbf{n}$ 的平面。

STEP 之外

(ii) 中的公式就是 Rodrigues 旋轉公式（Rodrigues' rotation formula），而 f 的矩陣是反對稱（antisymmetric）的「叉積矩陣」K，所以旋轉可寫成 $I + \sin\theta\, K + (1 - \cos\theta)K^2$，這也等於 $\exp(\theta K)$。(iii) 中的映射是 Householder 反射 $I - 2\mathbf{n}\mathbf{n}^{\mathsf{T}}$，是數值線性代數（numerical linear algebra）中的重要工具。在大學一年級的課程中，它們分別以行列式（determinant）為 $+1$ 和 -1 的正交矩陣（orthogonal matrix）的身份出現。Strang 的 *Introduction to Linear Algebra*（《線性代數導論》）是認識它們的好起點。

Beyond STEP 詳細解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hant/。解答文字採用 CC0 1.0；題目本身版權屬 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予轉載。由機器從英文翻譯而成；尚未經審閱。