詳細解答

STEP III 2022，第 6 題

純數學 • 滾動圓與切線

STEP III 2022，第 6 題

繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 OCR 提供下載的 2022 年 STEP 試卷（zip 檔案）內的 STEP III 試卷：

www.ocr.org.uk/Images/696587-2022-past-papers.zip

關鍵思路

第 (i) 部分是一個二階泰勒展開（Taylor expansion），而它真正的重點在最後一行的提醒：當一階項消失時，比值由二階項決定。在第 (ii) 部分中，滾動條件表明兩個圓經過接觸點的弧長相等，由此可知 C_1 轉了多少。在 (c) 的特殊點上，弦（chord）中的一階項恰好互相抵消，所以我們需要用到 (i) 中的二階項。

解答

第 (i) 部分

當 α 很小時，$\cos\alpha \approx 1 - \frac{1}{2}\alpha^2$ 及 $\sin\alpha \approx \alpha$，誤差的階為 α^3。因此

$$\begin{aligned}\cos(\theta+\alpha) - \cos\theta &= \cos\theta\cos\alpha - \sin\theta\sin\alpha - \cos\theta \\ &\approx \cos\theta(1 - \tfrac{1}{2}\alpha^2) - \alpha\sin\theta - \cos\theta = -\alpha\sin\theta - \tfrac{1}{2}\alpha^2\cos\theta,\end{aligned}$$

此即所求。同理，

$$\sin(\theta+\alpha) - \sin\theta \approx \alpha\cos\theta - \tfrac{1}{2}\alpha^2\sin\theta.$$

把 $(*)$ 的分子和分母同除以 α，

$$\frac{\sin(\theta+\alpha) - \sin\theta}{\cos(\theta+\alpha) - \cos\theta} \approx \frac{\cos\theta - \frac{1}{2}\alpha\sin\theta}{-\sin\theta - \frac{1}{2}\alpha\cos\theta} \longrightarrow -\frac{\cos\theta}{\sin\theta} = -\cot\theta,$$

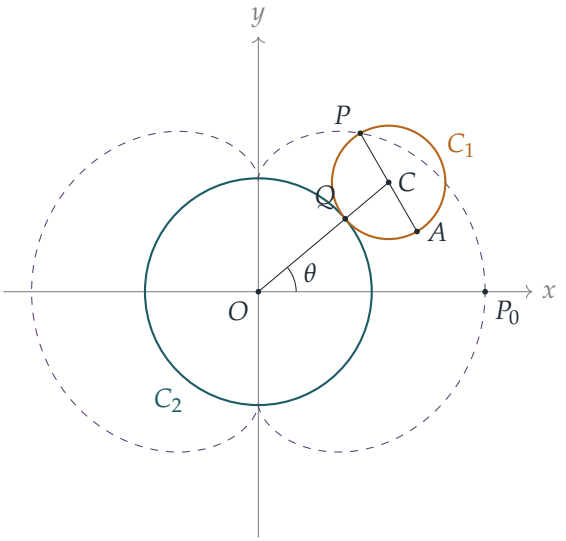
這個極限（limit）沒有問題，因為分母趨向 $-\sin\theta \neq 0$。

若 $\sin\theta = 0$，則 $\cos\theta = \pm 1$，分母的一階項便消失：

$$(*) \approx \frac{\alpha\cos\theta}{-\frac{1}{2}\alpha^2\cos\theta} = -\frac{2}{\alpha}.$$

所以 $(*)$ 沒有有限的極限：它的大小無界地增長，當 $\alpha \to 0^+$ 時趨向 $-\infty$，當 $\alpha \to 0^-$ 時趨向 $+\infty$。（從幾何上看，單位圓上由角 θ 到 $\theta+\alpha$ 的弦變成鉛垂，其斜率（gradient）趨向無限大。）

第 (ii)(a) 部分



圖中所示為 $n=3$ 的情況，虛線曲線是 P 的軌跡。設 C 為 C_1 的圓心。由於兩圓在 Q 相切，點 O、Q、C 共線（collinear），且 $OC=(n-1)a+a=na$，所以

$$\overrightarrow{OC}=na(\cos\theta,\sin\theta),$$

而從 C 看，點 Q 位於方向 $\theta+\pi$。

設 A 為 C_1 上與 P 直徑相對（diametrically opposite）的點；這就是開始時與 C_2 相接觸的 C_1 上的點，位於 $((n-1)a,0)$。無滑動滾動（rolling without slipping）表示 C_1 上由 A 到 Q 的弧長，等於接觸點在 C_2 上走過的弧長，即 $(n-1)a\theta$。由於 C_1 的半徑為 a，角 ACQ 等於 $(n-1)\theta$。

? **想一想** 從 C 看，A 位於 Q 的順時針方向還是逆時針方向？

當 C_1 沿 C_2 外側逆時針滾動時，C_1 本身也逆時針自轉，所以它已經滾過的點會被逆時針帶離接觸點。因此 $\overrightarrow{CA}$ 指向方向 $\theta+\pi+(n-1)\theta=n\theta+\pi$，而 $\overrightarrow{CP}=-\overrightarrow{CA}$ 指向方向 $n\theta$。（驗證：當 $\theta=0$ 時，這給出 $P=((n+1)a,0)$。C_1 總共轉了 $n\theta$，這就是一枚硬幣繞另一枚硬幣滾動時那個熟悉的「多轉一圈」。）因此

$$\overrightarrow{OP}=na(\cos\theta,\sin\theta)+a(\cos n\theta,\sin n\theta),$$

所以 $x(\theta) = a(n\cos\theta + \cos n\theta)$，此即所求，而且

$$y(\theta) = a(n\sin\theta + \sin n\theta).$$

第 (ii)(b) 部分

把兩式平方後相加，

$$OP^2 = a^2(n^2 + 1 + 2n(\cos\theta\cos n\theta + \sin\theta\sin n\theta)) = a^2(n^2 + 1 + 2n\cos(n-1)\theta).$$

令它等於 $(n-1)^2a^2 = (n^2 - 2n + 1)a^2$，得 $2n\cos(n-1)\theta = -2n$，即 $\cos(n-1)\theta = -1$。所以

$$\theta = \frac{(2k+1)\pi}{n-1}, \qquad k \in \mathbb{Z},$$

在繞 C_2 的每一圈中給出 $n-1$ 個不同的位置。這些正是 P 本身成為接觸點的時刻：曲線的尖點（cusp）。

第 (ii)(c) 部分

設 $\theta_0 = \pi/(n-1)$，則 $n\theta_0 = \theta_0 + \pi$，所以

$$\cos n\theta_0 = -\cos\theta_0, \qquad \sin n\theta_0 = -\sin\theta_0.$$

對每一項應用第 (i) 部分，其中 $n\theta$ 項以 $n\alpha$ 作為微小增量：

$$\begin{aligned}
\frac{y(\theta_0+\alpha) - y(\theta_0)}{a} &\approx n(\alpha\cos\theta_0 - \tfrac{1}{2}\alpha^2\sin\theta_0) \\
&\quad + (n\alpha\cos n\theta_0 - \tfrac{1}{2}n^2\alpha^2\sin n\theta_0) \\
&= n\alpha\cos\theta_0 - \tfrac{1}{2}n\alpha^2\sin\theta_0 - n\alpha\cos\theta_0 + \tfrac{1}{2}n^2\alpha^2\sin\theta_0 \\
&= \tfrac{1}{2}n(n-1)\alpha^2\sin\theta_0, \\
\frac{x(\theta_0+\alpha) - x(\theta_0)}{a} &\approx n(-\alpha\sin\theta_0 - \tfrac{1}{2}\alpha^2\cos\theta_0) \\
&\quad + (-n\alpha\sin n\theta_0 - \tfrac{1}{2}n^2\alpha^2\cos n\theta_0) \\
&= \tfrac{1}{2}n(n-1)\alpha^2\cos\theta_0,
\end{aligned}$$

兩者的誤差都是 α^3 階。一階項恰好互相抵消，正如 (i) 中 $\sin\theta = 0$ 的情況，所以答案由二階項決定。把分子和分母同除以 $\frac{1}{2}n(n-1)\alpha^2$，

$$\frac{y(\theta_0+\alpha) - y(\theta_0)}{x(\theta_0+\alpha) - x(\theta_0)} = \frac{\sin\theta_0 + O(\alpha)}{\cos\theta_0 + O(\alpha)} \longrightarrow \tan\theta_0,$$

前提是 $\cos\theta_0 \neq 0$，而這在 $n \geq 4$ 時成立。當 $n = 3$ 時，$\theta_0 = \frac{1}{2}\pi$；同樣的推導顯示倒數比值趨向 $\cot\theta_0 = 0$，所以弦變成鉛垂。

這個極限就是 θ_0 處切線（tangent）的斜率，因為它是弦斜率的極限。而

$$x(\theta_0) = a(n\cos\theta_0 - \cos\theta_0) = (n-1)a\cos\theta_0, \qquad y(\theta_0) = (n-1)a\sin\theta_0,$$

所以 OP 與 x 軸成角 θ_0，斜率為 $\tan\theta_0$（當 $n = 3$ 時為鉛垂）。切線與 OP 方向相同，所以 $(x(\theta_0), y(\theta_0))$ 處的切線平行於 OP。事實上，由於切線經過 P，它就落在直線 OP 上。

驗算

- 當 $\theta = 0$、$\alpha = 0.001$ 時，比值 $(*)$ 為 -1999.9998，對比 $-2/\alpha = -2000$。
- 當 $n = 5$、$\theta_0 = \frac{1}{4}\pi$ 及 $\alpha = 10^{-4}$ 時，弦的斜率為 1.0004，接近 $\tan\frac{1}{4}\pi = 1$。
- 在 θ_0 處，$OP = (n-1)a$，所以 (c) 中的點就是 (b) 中求得的 $k = 0$ 尖點。這就是該處切線沿徑向的原因。

常見錯誤

- 把 C_1 的轉角當作 $(n-1)\theta$（滾過的弧），忘記了 C 繞 O 運行所帶來的額外 θ。
- 在 (c) 中只用一階近似：這只會得到 $0/0$，甚麼也說明不了。
- 忘記 $n = 3$ 時 $\theta_0 = \frac{1}{2}\pi$，此時 $\tan\theta_0$ 沒有定義。

STEP 之外

這條曲線是一條有 $n-1$ 個尖點的外擺線（epicycloid）。在每個尖點處，速度（velocity）$(x'(\theta), y'(\theta))$ 為零，所以一般的公式 $\mathrm{d}y/\mathrm{d}x = y'/x'$ 不再適用。第 (c) 部分透過推到二階來處理這個問題，這其實就是喬裝了的洛必達法則（l'Hôpital's rule）。參數化曲線（parametrised curve）上速度為零的點稱為奇點（singular points），它們是曲線微分幾何（differential geometry）入門課程的研究對象。關於第 (i) 部分背後的極限與泰勒近似，可參閱 Abbott 的 *Understanding Analysis*（《理解分析》）。

Beyond STEP 詳細解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hant/。解答文字採用 CC0 1.0；題目本身版權屬 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予轉載。由機器從英文翻譯而成；尚未經審閱。