詳細解答

STEP III 2022，第 5 題

純數學 • 對稱定積分

> **STEP III 2022，第 5 題**
>
> 繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 OCR 提供下載的 2022 年 STEP 試卷（zip 檔案）內的 STEP III 試卷：
>
> www.ocr.org.uk/Images/696587-2022-past-papers.zip

關鍵思路

在對稱區間（symmetric interval）$[-a, a]$ 上，代換（substitution）$x \mapsto -x$ 讓我們可以把積分「摺疊」到 $[0, a]$ 上，把 x 處的值與 $-x$ 處的值配成一對。對於形如 $1/(1+\text{某式})$ 的被積函數（integrand），這一對 $\frac{1}{1+p} + \frac{1}{1+q}$ 恰好在 $pq = 1$ 時化簡為 1，而 $\mathrm{e}^{x} \cdot \mathrm{e}^{-x} = 1$ 正是典型例子。整道題的重點，就是看出這種配對，並且知道在甚麼情況下這是答案等於 a 的唯一途徑。

解答

第 (i) 部分

設 $I = \displaystyle\int_{-a}^{a} \frac{1}{1+\mathrm{e}^{x}}\,\mathrm{d}x$。代入 $x = -u$（於是 $\mathrm{d}x = -\mathrm{d}u$，而積分上下限互換後又換回來），

$$I = \int_{-a}^{a} \frac{1}{1+\mathrm{e}^{-u}}\,\mathrm{d}u = \int_{-a}^{a} \frac{\mathrm{e}^{u}}{\mathrm{e}^{u}+1}\,\mathrm{d}u,$$

這裏把分子和分母同乘以 e^{u}。把這式與 I 的原式相加，

$$2I = \int_{-a}^{a} \frac{1+\mathrm{e}^{x}}{1+\mathrm{e}^{x}}\,\mathrm{d}x = \int_{-a}^{a} 1\,\mathrm{d}x = 2a,$$

所以對所有 $a \geq 0$，都有 $I = a$，得證。

第 (ii) 部分

解釋。對 $a \geq 0$，定義 $G(a) = \displaystyle\int_{0}^{a} g(x)\,\mathrm{d}x$。由於 g 連續（continuous），微積分基本定理（fundamental theorem of calculus）告訴我們 G 可導（differentiable），且 $G'(a) = g(a)$

（在 $a = 0$ 處為單側導數（one-sided derivative））。但 G 在 $[0, \infty)$ 上恆等於零，所以它在該處的導數為零。因此對所有 $a \geq 0$，都有 $g(a) = 0$。（連續性很重要：沒有它的話，g 可以在個別孤立點上不為零，而不影響任何積分。）

摺疊積分。在 0 處分開，並在左半部分代入 $x = -u$：

$$\int_{-a}^{0} \frac{\mathrm{d}x}{1 + \mathrm{f}(x)} = \int_{0}^{a} \frac{\mathrm{d}u}{1 + \mathrm{f}(-u)}.$$

把 a 寫成 $a = \int_0^a 1 \, \mathrm{d}x$，便得到

$$\int_{-a}^{a} \frac{\mathrm{d}x}{1 + \mathrm{f}(x)} - a = \int_{0}^{a} g(x) \, \mathrm{d}x, \qquad \text{其中} \quad g(x) = \frac{1}{1 + \mathrm{f}(x)} + \frac{1}{1 + \mathrm{f}(-x)} - 1.$$

由於 $\mathrm{f} \geq 0$，兩個分母都至少為 1，所以 g 連續。

想一想 剛才解釋的結果只是單向的命題。它給出「當且僅當」（if and only if）的哪一個方向？另一個方向又從何而來？

- 若對所有 $x \geq 0$ 都有 $g(x) = 0$，則 $\int_0^a g = 0$，於是對所有 $a \geq 0$，該積分都等於 a。這個方向是顯然的。
- 反過來，若對所有 $a \geq 0$，該積分都等於 a，則對所有 $a \geq 0$ 都有 $\int_0^a g = 0$，再由第一段的結果（套用於這個連續的 g），得出對所有 $x \geq 0$ 都有 $g(x) = 0$。

所以積分條件成立，當且僅當對所有 $x \geq 0$ 都有 $g(x) = 0$。

乘積條件。設 $p = \mathrm{f}(x)$，$q = \mathrm{f}(-x)$。兩邊同乘以 $(1 + p)(1 + q) > 0$，

$$\begin{aligned} \frac{1}{1+p} + \frac{1}{1+q} = 1 &\iff (1+q) + (1+p) = (1+p)(1+q) \\ &\iff 2 + p + q = 1 + p + q + pq \\ &\iff pq = 1. \end{aligned}$$

所以對所有 $x \geq 0$ 都有 $g(x) = 0$，當且僅當對所有 $x \geq 0$ 都有 $\mathrm{f}(x)\mathrm{f}(-x) = 1$。最後，把 x 換成 $-x$ 時，式子 $\mathrm{f}(x)\mathrm{f}(-x)$ 不變，所以它對所有 $x \geq 0$ 等於 1，恰好等同於它對所有實數 x 等於 1。這樣便完成了整條等價（equivalence）鏈。

第 (iii) 部分

跟之前完全一樣地摺疊積分，這次在左半部分用上 $\mathrm{h}(-u)=\mathrm{h}(u)$：

$$\begin{aligned}\int_{-a}^{a}\frac{\mathrm{h}(x)}{1+\mathrm{f}(x)}\,\mathrm{d}x &= \int_{0}^{a}\frac{\mathrm{h}(x)}{1+\mathrm{f}(x)}\,\mathrm{d}x+\int_{0}^{a}\frac{\mathrm{h}(-u)}{1+\mathrm{f}(-u)}\,\mathrm{d}u\\ &= \int_{0}^{a}\mathrm{h}(x)\left(\frac{1}{1+\mathrm{f}(x)}+\frac{1}{1+\mathrm{f}(-x)}\right)\mathrm{d}x\\ &= \int_{0}^{a}\mathrm{h}(x)\,\mathrm{d}x,\end{aligned}$$

這是因為根據第 (ii) 部分證明的等價關係，只要 $\mathrm{f}(x)\mathrm{f}(-x)=1$，括號內的式子便等於 1。（條件 $\mathrm{f}\geq 0$ 及連續性只是確保每個被積函數都連續。）

第 (iv) 部分

> **想一想** 怎樣把 $\dfrac{\mathrm{e}^{-x}}{\cosh x}$ 寫成 $\dfrac{\text{常數}}{1+\mathrm{f}(x)}$ 的形式？

由於 $\cosh x=\frac{1}{2}(\mathrm{e}^{x}+\mathrm{e}^{-x})$，

$$\frac{\mathrm{e}^{-x}\cos x}{\cosh x}=\frac{2\mathrm{e}^{-x}\cos x}{\mathrm{e}^{x}+\mathrm{e}^{-x}}=\frac{2\cos x}{1+\mathrm{e}^{2x}},$$

這裏把分子和分母同乘以 e^{x}。取 $\mathrm{f}(x)=\mathrm{e}^{2x}$，它連續、為正，並滿足 $\mathrm{f}(x)\mathrm{f}(-x)=\mathrm{e}^{2x}\mathrm{e}^{-2x}=1$；再取 $\mathrm{h}(x)=2\cos x$，它連續且為偶函數（even function）。以 $a=\frac{1}{2}\pi$ 套用第 (iii) 部分，得

$$\int_{-\frac{1}{2}\pi}^{\frac{1}{2}\pi}\frac{\mathrm{e}^{-x}\cos x}{\cosh x}\,\mathrm{d}x=\int_{0}^{\frac{1}{2}\pi}2\cos x\,\mathrm{d}x=\Big[2\sin x\Big]_{0}^{\frac{1}{2}\pi}=2.$$

驗算

- 第 (i) 部分是第 (iii) 部分在 $\mathrm{f}(x)=\mathrm{e}^{x}$、$\mathrm{h}\equiv 1$ 時的特例，給出 $\int_{0}^{a}1\,\mathrm{d}x=a$，與預期相符。
- 一個反例：$\mathrm{f}(x)=x^{2}$ 有 $\mathrm{f}(x)\mathrm{f}(-x)=x^{4}\neq 1$，而確實 $\int_{-1}^{1}\frac{\mathrm{d}x}{1+x^{2}}=\frac{\pi}{2}\neq 1$。
- 用辛普森法則（Simpson's rule）對第 (iv) 部分的積分作數值計算，得到 2.0000000；第 (iii) 部分的恆等式亦已用電腦對多個隨機選取的 $\mathrm{f}=\mathrm{e}^{(\text{奇函數})}$ 及偶函數 h 加以驗證。

常見錯誤

- 在第 (ii) 部分只證明了「當且僅當」的其中一個方向：從積分條件推回 $g = 0$ 的那一步，正正需要用到第一個結果（以及 g 的連續性）。
- 忘記說明為何 $\mathrm{f}(x)\mathrm{f}(-x) = 1$ 對 $x \geq 0$ 成立便足以推出它對所有 x 成立：原因是這個式子在 $x \mapsto -x$ 之下對稱。
- 在第 (iv) 部分，試圖直接積分 $\mathrm{e}^{-x}\cos x/\cosh x$，而不是先把它改寫成 $2\cos x/(1+\mathrm{e}^{2x})$。

STEP 之外

第 (ii) 部分的論證，其實是把微積分基本定理「倒過來」用；這也是分析（analysis）中經常出現連續性假設的原因：積分「看不見」個別點上發生的事，所以只有在連續的情況下，才能從一個函數的積分還原出它的函數值。摺疊技巧與把函數拆成偶部分和奇部分的做法是近親；在這裏，$\frac{1}{1+\mathrm{f}(x)} - \frac{1}{2}$ 是奇函數（odd function），恰好當 $\mathrm{f}(x)\mathrm{f}(-x) = 1$。Abbott 的 *Understanding Analysis*（《理解分析》）對微積分基本定理以及為何需要連續性有仔細的論述。

Beyond STEP 詳細解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hant/。解答文字採用 CC0 1.0；題目本身版權屬 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予轉載。由機器從英文翻譯而成；尚未經審閱。