詳細解答

STEP III 2022，第 4 題

純數學 • 無窮乘積

> **STEP III 2022，第 4 題**
>
> 繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 OCR 提供下載的 2022 年 STEP 試卷（zip 檔案）內的 STEP III 試卷：
>
> www.ocr.org.uk/Images/696587-2022-past-papers.zip

本題在 *Beyond STEP* 第 2.5 節韋達乘積中有完整的引導式講解：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hant/ch02/viete.html

關鍵思路

一切都建基於倍角公式（double-angle formula）$\sinh 2\theta = 2\sinh\theta\cosh\theta$，並反覆應用：每用一次，sinh 的自變量便減半，同時留下一個 cosh 因子。減半 n 次之後，剩下的 $\sinh(x/2^n)$ 非常小，而且表現得跟 $x/2^n$ 一樣，所以令 $n \to \infty$ 便能把一個有限的恆等式變成一個無窮乘積（infinite product）。最後兩部分就是在精心挑選的 x 值上計算這個乘積，再配合它的三角函數版本。

解答

第 (i) 部分

記 $P_n(x) = \cosh\left(\frac{x}{2}\right)\cosh\left(\frac{x}{4}\right)\cdots\cosh\left(\frac{x}{2^n}\right)$。我們證明對每個正整數 n，都有 $\sinh x = 2^n P_n(x)\sinh\left(\frac{x}{2^n}\right)$。

基礎情況（*base case*）$n = 1$。在倍角公式中取 $\theta = x/2$，得 $\sinh x = 2\cosh\left(\frac{x}{2}\right)\sinh\left(\frac{x}{2}\right)$，這正是 $n = 1$ 時的命題。

歸納步驟（*inductive step*）。假設結果對某個 $n = k$ 成立。在倍角公式中取 $\theta = x/2^{k+1}$，

$$\sinh\left(\frac{x}{2^k}\right) = 2\cosh\left(\frac{x}{2^{k+1}}\right)\sinh\left(\frac{x}{2^{k+1}}\right),$$

所以

$$\begin{aligned}\sinh x &= 2^k P_k(x)\sinh\left(\frac{x}{2^k}\right) = 2^k P_k(x)\cdot 2\cosh\left(\frac{x}{2^{k+1}}\right)\sinh\left(\frac{x}{2^{k+1}}\right)\\ &= 2^{k+1}P_{k+1}(x)\sinh\left(\frac{x}{2^{k+1}}\right),\end{aligned}$$

這就是 $n = k+1$ 時的結果。由歸納法（induction），結果對所有正整數 n 都成立。

推論。若 $x \neq 0$，則 $x/2^n \neq 0$，所以 $\sinh(x/2^n) \neq 0$（sinh 唯一的零點在 0）。因此我們可以把恆等式除以 $x\sinh(x/2^n)/2^n$，得到

$$\frac{\sinh x}{x}\cdot\frac{x/2^n}{\sinh(x/2^n)} = P_n(x),$$

即為所求。

第 (ii) 部分

當 $y \neq 0$ 時，把麥克勞林級數（Maclaurin series）除以 y，得

$$\frac{\sinh y}{y} = 1 + \frac{y^2}{3!} + \frac{y^4}{5!} + \cdots = 1 + y^2\sum_{r=1}^{\infty}\frac{y^{2r-2}}{(2r+1)!}.$$

? **想一想** 只說「第一項之後的每一項都趨於 0」足夠嗎？

不完全足夠：項數有無窮多，所以我們應該為它們的和找一個界。當 $0 < |y| \leq 1$ 時，$y^{2r-2} \leq 1$，所以

$$0 \leq \frac{\sinh y}{y} - 1 \leq y^2\sum_{r=1}^{\infty}\frac{1}{(2r+1)!} = y^2(\sinh 1 - 1),$$

而當 $y \to 0$ 時，右邊趨於 0。因此 $\dfrac{\sinh y}{y} \to 1$，取倒數（reciprocal）後得 $\dfrac{y}{\sinh y} \to 1$。現在固定 $x \neq 0$，並在 (i) 的恆等式中令 $n \to \infty$。設 $y = x/2^n$；那麼 $y \to 0$，所以因子 $\dfrac{x/2^n}{\sinh(x/2^n)}$ 趨於 1。於是左邊趨於 $\dfrac{\sinh x}{x}$，而右邊是部分積（partial product）$P_n(x)$。所以部分積收斂（converge）至 $\dfrac{\sinh x}{x}$，這正是以下命題：

$$\frac{\sinh x}{x} = \cosh\left(\frac{x}{2}\right)\cosh\left(\frac{x}{4}\right)\cdots\cosh\left(\frac{x}{2^n}\right)\cdots.$$

第 (iii) 部分

取 $x = \ln 2$，則 $\mathrm{e}^{x/2^n} = 2^{1/2^n}$，所以

$$\cosh\left(\frac{x}{2^n}\right) = \frac{2^{1/2^n} + 2^{-1/2^n}}{2} = \frac{2^{2/2^n}+1}{2\times 2^{1/2^n}} = \frac{1+2^{1/2^{n-1}}}{2\times 2^{1/2^n}},$$

這裏把分子和分母同乘以 $2^{1/2^n}$。當 $n=1$ 時，得 $\cosh\left(\frac{x}{2}\right)=\dfrac{1+2}{2\sqrt{2}}=\dfrac{3}{2\sqrt{2}}$；當 $n=2$ 時，得

$$\cosh\left(\frac{x}{4}\right)=\frac{1+2^{1/2}}{2\times 2^{1/4}},$$

即為所求。

在 (ii) 的左邊，$\sinh(\ln 2)=\frac{1}{2}\left(2-\frac{1}{2}\right)=\frac{3}{4}$，所以 $\dfrac{\sinh x}{x}=\dfrac{3}{4\ln 2}$。

在右邊，首 N 個因子的部分積為

$$P_N(\ln 2)=\frac{\prod_{n=1}^{N}\left(1+2^{1/2^{n-1}}\right)}{2^N\cdot 2^{\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{2^N}}}=\frac{3}{2}\cdot\prod_{k=1}^{N-1}\frac{1+2^{1/2^k}}{2}\cdot\frac{1}{2^{1-1/2^N}},$$

這裏我們抽出了 $n=1$ 的因子 $(1+2)/2$，以 $k=n-1$ 重新編號，並把指數中的等比級數（geometric series）求和。當 $N\to\infty$ 時，$2^{1-1/2^N}\to 2$，而由 (ii) 得 $P_N(\ln 2)\to\dfrac{3}{4\ln 2}$。因此部分積 $\prod_{k=1}^{N-1}\frac{1+2^{1/2^k}}{2}$ 收斂，而且

$$\frac{3}{4\ln 2}=\frac{3}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\prod_{k=1}^{\infty}\frac{1+2^{1/2^k}}{2},$$

約去 $\frac{3}{4}$ 後得

$$\frac{1}{\ln 2}=\frac{1+2^{\frac{1}{2}}}{2}\times\frac{1+2^{\frac{1}{4}}}{2}\times\frac{1+2^{\frac{1}{8}}}{2}\times\cdots.$$

第 (iv) 部分

同一論證換成 sin 和 cos 後一字不改地適用，因為 $\sin 2\theta=2\sin\theta\cos\theta$ 具有相同的形式。由歸納法得

$$\sin x=2^n\cos\left(\frac{x}{2}\right)\cdots\cos\left(\frac{x}{2^n}\right)\sin\left(\frac{x}{2^n}\right).$$

當 $0<x<\pi$ 時，$0<x/2^n<\pi$，所以 $\sin(x/2^n)\neq 0$，可以像之前一樣相除。麥克勞林級數 $\sin y=y-\frac{y^3}{3!}+\cdots$ 給出：當 $0<|y|\le 1$ 時，

$$\left|\frac{\sin y}{y}-1\right|\le y^2\sum_{r=1}^{\infty}\frac{1}{(2r+1)!}=y^2(\sinh 1-1)\to 0,$$

所以 $\sin y/y\to 1$，令 $n\to\infty$，得

$$\frac{\sin x}{x}=\cos\left(\frac{x}{2}\right)\cos\left(\frac{x}{4}\right)\cos\left(\frac{x}{8}\right)\cdots.$$

（另一個方法是在 (ii) 中代入 $x=\mathrm{i}t$，並利用 $\cosh(\mathrm{i}t)=\cos t$ 和 $\sinh(\mathrm{i}t)=\mathrm{i}\sin t$；但 (ii) 中的級數論證是針對實數 y 的，所以直接重做一遍會更乾淨。）

取 $x=\frac{\pi}{2}$：左邊為 $\dfrac{1}{\pi/2}=\dfrac{2}{\pi}$，而各因子為 $\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)$、$\cos\left(\frac{\pi}{8}\right)$、$\cos\left(\frac{\pi}{16}\right)$，如此類推。

想一想 怎樣把 $\cos(\pi/8)$、$\cos(\pi/16)$、... 化成嵌套平方根？

把 $\cos 2\theta = 2\cos^2\theta - 1$ 寫成 $2\cos\theta = \sqrt{2+2\cos 2\theta}$ 的形式；這裏取正根，因為當 $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$ 時 $\cos\theta > 0$。設 $c_n = 2\cos\left(\pi/2^{n+1}\right)$。那麼 $c_1 = 2\cos\frac{\pi}{4} = \sqrt{2}$，而取 $\theta = \pi/2^{n+2}$，得

$$c_{n+1} = \sqrt{2+c_n}.$$

所以 $c_1 = \sqrt{2}$、$c_2 = \sqrt{2+\sqrt{2}}$、$c_3 = \sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}$，如此類推，而乘積的第 n 個因子是 $c_n/2$。因此

$$\frac{2}{\pi} = \frac{\sqrt{2}}{2} \times \frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2} \times \frac{\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}}{2} \times \cdots,$$

這就是 1593 年的韋達（Viète）公式。

驗算

- 在 (i) 中代入 $n = 1$ 和 $x = 2\theta$：會得回倍角公式，理應如此。
- 在 (iii) 中，$\cosh(\frac{1}{2}\ln 2) = \frac{3}{2\sqrt{2}} \approx 1.0607$，而一般 n 的公式在 $n = 1$ 時與此吻合。
- 數值上，(iii) 的乘積很快便穩定下來：首 6o 個因子給出 1.442695...，與 $1/\ln 2 = 1.4426950...$ 吻合；而 (iv) 的乘積給出 0.6366197...，與 $2/\pi$ 吻合。兩者均已用電腦驗證至約 15 位有效數字（significant figures）。

常見錯誤

- 除以 $\sinh(x/2^n)$ 時，沒有指出它因 $x \neq 0$ 而不為零。
- 在 (iii) 中出現差一錯誤：$n = 1$ 的因子是 $3/(2\sqrt{2})$，並不是 $(1+2^{1/2^k})/2$ 的形式；而零散的冪 $2^{1/2}\cdot 2^{1/4}\cdots$ 合起來給出因子 2，而不是 1。
- 沒有從級數作任何論證便假設「$y/\sinh y \to 1$」，而這正是題目要求證明的。

STEP 之外

無窮乘積 $\prod a_n$ 定義為其部分積的極限，正如無窮級數是其部分和（partial sums）的極限；取對數（logarithm）可以把兩者互相轉換，所以 $\prod(1+u_n)$ 的收斂與 $\sum u_n$ 的收斂密切相關。這裏 $\sin x/x$ 的乘積，與歐拉（Euler）更著名的乘積 $\sin x = x\prod_{k\geq 1}\left(1 - x^2/(k^2\pi^2)\right)$ 並列，後者可推出 $\sum 1/k^2 = \pi^2/6$。若想了解如何嚴謹處理極限，使第 (ii) 部分這類論證變得嚴密，可閱讀 Abbott 的 *Understanding Analysis*（《理解分析》）。

Beyond STEP 詳細解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hant/。解答文字採用 CC0 1.0；題目本身版權屬 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予轉載。由機器從英文翻譯而成；尚未經審閱。