詳細解答

STEP III 2022，第 3 題

純數學 • 隱函數微分法

STEP III 2022，第 3 題

繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 OCR 提供下載的 2022 年 STEP 試卷（zip 檔案）內的 STEP III 試卷：

www.ocr.org.uk/Images/696587-2022-past-papers.zip

關鍵思路

用隱函數求導（implicit differentiation）。駐點（stationary point）要求 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$ 的分子為零，由此可把 y 以 x 表示（或得出兩者之間的一個線性關係）。把它代回曲線方程，便只剩下一條關於 x 的方程，問題於是變成：這條方程何時有兩個實根（real roots）？在 (i) 中，它其實是一條變了裝的二次方程（quadratic）；在 (ii) 中，它是一條四次方程（quartic），而數算其根的方法是找出它的轉向點（turning point）。

解答

第 (i) 部分

將 $ax^2 + bxy + cy^2 = 1$ 對 x 作隱函數求導，得

$$2ax + by + (bx + 2cy)\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = 0.$$

在駐點處 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = 0$，所以 $2ax + by = 0$，即 $y = -\frac{2a}{b}x$（因為 $abc \neq 0$，所以可以除以 b）。代入曲線方程，

$$ax^2 - 2ax^2 + \frac{4a^2c}{b^2}x^2 = 1$$
$$\frac{a(4ac - b^2)}{b^2}x^2 = 1.$$

若 $4ac - b^2 \leq 0$，則對所有 x，左方都 ≤ 0（記得 $a > 0$），所以根本沒有駐點。因此，若曲線有兩個駐點，必有 $4ac - b^2 > 0$，即 $b^2 < 4ac$，得證。（反過來，當 $b^2 < 4ac$ 時，得 $x = \pm|b|/\sqrt{a(4ac - b^2)}$，恰好給出兩個點。）

想一想 在這些點上，$bx+2cy$ 會不會也是零，以致導數其實沒有定義？

若 $2ax+by=0$ 與 $bx+2cy=0$ 同時成立，由於行列式（determinant）$4ac-b^2$ 不為零，唯一的解是 $x=y=0$，而這點並不在曲線上。所以這兩點確實滿足 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=0$。

第 (ii) 部分

將 $ay^3+bx^2y+cx=1$ 作隱函數求導，得

$$(3ay^2+bx^2)\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+2bxy+c=0.$$

因此在駐點處 $2bxy+c=0$。由於 $c\neq 0$，故 $x\neq 0$，於是 $y=-\dfrac{c}{2bx}$。代入曲線方程，

$$-\frac{ac^3}{8b^3x^3}-\frac{cx}{2}+cx=1, \qquad \text{即} \qquad -\frac{ac^3}{8b^3x^3}+\frac{cx}{2}=1.$$

兩邊乘以 $8b^3x^3$ 並移項，

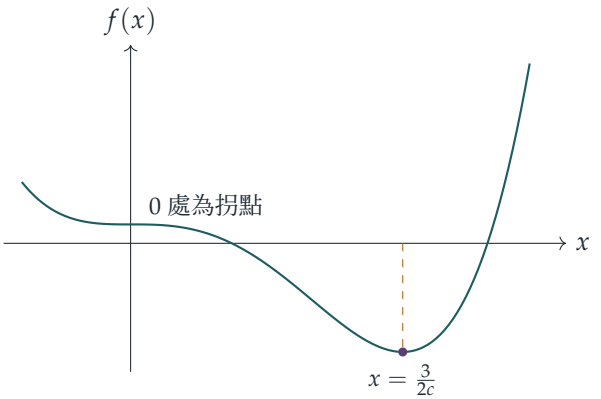
$$4cb^3x^4-8b^3x^3-ac^3=0,$$

這正是所求的方程。

把左方記作 $f(x)$。由於 $y=-c/(2bx)$ 由 x 決定，每個駐點的 x 坐標各不相同。所以有兩個駐點，就表示 f 至少有兩個相異實根。要數算 f 的根，可以看它的導數：

$$f'(x)=16cb^3x^3-24b^3x^2=8b^3x^2(2cx-3).$$

因子 x^2 永不變號，所以 f' 只在 $x=\frac{3}{2c}$ 處變號。設 $c>0$。那麼首項係數（leading coefficient）$4cb^3$ 為正（因為 $b>0$），f 在 $x<\frac{3}{2c}$ 時嚴格遞減，在 $x>\frac{3}{2c}$ 時嚴格遞增；$x=0$ 只是一個水平拐點（stationary point of inflection）。因此 f 在 $\frac{3}{2c}$ 兩側各最多有一個根，而它有兩個相異根當且僅當其最小值為負。若 $c<0$，情況全部倒轉：f 先增後減，有兩個相異根當且僅當其最大值為正。兩種情況下，條件都是 $c\,f\left(\frac{3}{2c}\right)<0$。



$a=-1$，$b=c=1$ 的情況：$f(x)=4x^4-8x^3+1$ 只有一個轉向點，即 $x=\frac{3}{2}$ 處的極小點，並有兩個實根。

現在在轉向點求值：

$$\begin{aligned} f\left(\tfrac{3}{2c}\right) &= 4cb^3\cdot\frac{81}{16c^4}-8b^3\cdot\frac{27}{8c^3}-ac^3 \\ &= \frac{81b^3}{4c^3}-\frac{108b^3}{4c^3}-ac^3=-\frac{27b^3+4ac^6}{4c^3}. \end{aligned}$$

所以

$$c\,f\left(\tfrac{3}{2c}\right)=-\frac{4ac^6+27b^3}{4c^2},$$

而這式為負當且僅當 $4ac^6+27b^3>0$。因此，若曲線有兩個駐點，則 $4ac^6+27b^3>0$。

第 (iii) 部分

第二及第三條方程表示 $2bxy+c$ 以及 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$ 的係數 $3ay^2+bx^2$ 同時為零，所以這是曲線上一個令 (ii) 的方法失效的點。由於 $c\neq 0$，第二條方程給出 $x\neq 0$ 及 $y=-\dfrac{c}{2bx}$。前兩條方程正是我們在 (ii) 中所用的，所以 x 滿足

$$4cb^3x^4-8b^3x^3-ac^3=0. \qquad (*)$$

把 $y=-c/(2bx)$ 代入第三條方程，

$$\frac{3ac^2}{4b^2x^2}+bx^2=0 \quad\Longrightarrow\quad 4b^3x^4=-3ac^2.$$

乘以 c，可見 $(*)$ 的第一項為 $-3ac^3$，於是 $(*)$ 變成

$$-3ac^3-8b^3x^3-ac^3=0 \quad\Longrightarrow\quad x^3=-\frac{ac^3}{2b^3}.$$

把 $x^4=-\dfrac{3ac^2}{4b^3}$ 除以此式（因 $x\neq 0$，可以這樣做），得

$$x=\frac{-3ac^2/(4b^3)}{-ac^3/(2b^3)}=\frac{3}{2c}.$$

所以這個解恰好位於 (ii) 中 f 的轉向點。把 $x=\frac{3}{2c}$ 代回 $x^3=-\frac{ac^3}{2b^3}$：

$$\frac{27}{8c^3}=-\frac{ac^3}{2b^3} \quad\Longrightarrow\quad 54b^3=-8ac^6 \quad\Longrightarrow\quad 4ac^6+27b^3=0,$$

得證。（等價地，由 (ii) 的公式可知 $f\left(\frac{3}{2c}\right)=0$。）這是 (ii) 的邊界情況：四次方程的兩個根在轉向點合併成一個重根（repeated root），而曲線在該處有一個奇點（singular point），而不是兩個駐點。

驗算

- 在 (i) 中取 $a = c = 1$、$b = 1$：曲線 $x^2 + xy + y^2 = 1$ 是一個橢圓（ellipse），且 $b^2 = 1 < 4$；它的駐點位於 $x = \pm\frac{1}{\sqrt{3}}$、$y = \mp\frac{2}{\sqrt{3}}$，這些點確實在曲線上。
- 在 (ii) 中取 $a = -1$、$b = c = 1$，得 $4ac^6 + 27b^3 = 23 > 0$，而 f 的最小值為 $f(\frac{3}{2}) = -5.75 = -\frac{23}{4}$，與 $-\frac{27b^3+4ac^6}{4c^3}$ 吻合。
- 在 (iii) 中取 $a = -2$、$c = 1.3$，並取 b 使 $27b^3 = -4ac^6$；那麼 $x = \frac{3}{2c}$、$y = -\frac{c}{2bx}$ 在捨入誤差範圍內滿足全部三條方程。以電腦對數千組隨機的 (a, b, c) 作檢驗，亦證實駐點的數目與 (i) 和 (ii) 中的條件相符。

常見錯誤

- 忘記 $x = 0$ 是四次多項式的一個臨界點：它是拐點（point of inflection）而非轉向點，指出這一點才能斷定最多只有兩個根。
- 忽略 c 的正負號：只有當 $c > 0$ 時，轉向點才是極小點。把條件寫成 $c\,f(\frac{3}{2c}) < 0$，便可一次過處理兩種情況。
- 在 (i) 中沒有指出 $b^2 = 4ac$ 的情況會得出 $0 = 1$，所以這情況同樣沒有駐點。

STEP 之外

量 $4ac^6 + 27b^3$ 在相差一個因子的意義下，就是該四次方程的判別式（discriminant）：它為零當且僅當四次方程有重根，正如二次方程的 $b^2 - 4ac$（以及三次方程 $t^3 + pt + q$ 的 $4p^3 + 27q^2$）一樣。第 (iii) 部分展示了它的幾何意義：重根對應曲線上的一個奇點，在該點 $ay^3 + bx^2y + cx$ 的兩個偏導數（partial derivatives）同時為零。奇點與判別式是代數幾何（algebraic geometry）的起點；若想以淺白而直觀的方式認識與多項式及曲線相關的概念，可讀 Needham 的 *Visual Complex Analysis*（《直觀複分析》）；若想做更多同類型的題目，可讀 Siklos 的 *Advanced Problems in Mathematics*（《高等數學難題》）。

Beyond STEP 詳細解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hant/。解答文字採用 CC0 1.0；題目本身版權屬 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予轉載。由機器從英文翻譯而成；尚未經審閱。