詳細解答

STEP III 2022，第 2 題

純數學 • 無窮遞降法

STEP III 2022，第 2 題

繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 OCR 提供下載的 2022 年 STEP 試卷（zip 檔案）內的 STEP III 試卷：

www.ocr.org.uk/Images/696587-2022-past-papers.zip

本題在 *Beyond STEP* 第 1.5 節無窮遞降法中有完整的引導式講解：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hant/ch01/infinite-descent.html

關鍵思路

這是費馬（Fermat）的無窮遞降法（*method of infinite descent*）。假設存在一組非零整數解。透過整除性（divisibility）論證，可證明所有變量都有一個公因數。把它除去，便得到同一類（或密切相關的一類）的新解，而且各數都是絕對值嚴格更小的非零整數。這個過程不可能無止境地進行下去，因為正整數不可能無止境地遞減。每一部分的工夫在於找出應考慮的質數（prime）（2 或 3），並驗證新解確實與舊解具有相同的形式。

解答

全程我們會用到兩個事實。若質數 m 整除 x^k，則 m 整除 x。另外，若 x 是 $m \geq 2$ 的非零倍數，則 x/m 是非零整數，且 $|x/m| < |x|$。

第 (i) 部分

假設 $a^3 + 2b^3 + 4c^3 = 0$，其中 a, b, c 為非零整數。那麼

$$a^3 = -2\left(b^3 + 2c^3\right)$$

是偶數。奇數的立方是奇數，所以 a 是偶數。設 $a = 2p$，則 p 是非零整數，且 $|p| = \frac{1}{2}|a| < |a|$。代入得

$$8p^3 + 2b^3 + 4c^3 = 0 \quad \Longrightarrow \quad 4p^3 + b^3 + 2c^3 = 0.$$

這就是第一個結論。

現在對新方程重複同一論證，得 $b^3 = -2\left(2p^3 + c^3\right)$，所以 b 是偶數，設 $b = 2q$，於是

$$4p^3 + 8q^3 + 2c^3 = 0 \quad \Longrightarrow \quad 2p^3 + 4q^3 + c^3 = 0.$$

再做一次，$c^3 = -2\left(p^3 + 2q^3\right)$，所以 $c = 2r$，且

$$2p^3 + 4q^3 + 8r^3 = 0 \quad \Longrightarrow \quad p^3 + 2q^3 + 4r^3 = 0.$$

這裏 $p = a/2$、$q = b/2$ 和 $r = c/2$ 都是非零整數，且 $|p| < |a|$、$|q| < |b|$ 及 $|r| < |c|$，正如所求。

> **想一想** 為甚麼這表示根本沒有解，而不只是「另一組解」？

假設存在非零整數解。在所有這些解之中，選取 $|a|$ 盡可能小的一組。這是做得到的，因為任何非空的正整數集合都有最小元素（least element）。上述論證於是給出另一組非零整數解 (p, q, r)，且 $|p| < |a|$，這與 $|a|$ 的最小性矛盾。所以這樣的整數 a、b、c 並不存在。（等價地說，這個過程會給出一個由正整數組成、無窮且嚴格遞減的數列 $|a| > |a/2| > |a/4| > \cdots$，而這是不可能的。）

第 (ii) 部分

這次要用的質數是 3。假設 $9a^3 + 10b^3 + 6c^3 = 0$，其中 a, b, c 為非零整數。

- 由於 $10b^3 = -3\left(3a^3 + 2c^3\right)$，3 整除 $10b^3$。因為 3 不整除 10，所以它整除 b^3，從而整除 b。設 $b = 3q$，則 $9a^3 + 270q^3 + 6c^3 = 0$，即

$$3a^3 + 90q^3 + 2c^3 = 0.$$

- 現在 $2c^3 = -3\left(a^3 + 30q^3\right)$，所以 $3 \mid c$。設 $c = 3r$：$3a^3 + 90q^3 + 54r^3 = 0$，即

$$a^3 + 30q^3 + 18r^3 = 0.$$

- 最後 $a^3 = -3\left(10q^3 + 6r^3\right)$，所以 $3 \mid a$。設 $a = 3p$：$27p^3 + 30q^3 + 18r^3 = 0$，即

$$9p^3 + 10q^3 + 6r^3 = 0.$$

所以 $(p, q, r) = (a/3, b/3, c/3)$ 是同一方程的非零整數解，且 $|p| < |a|$。與第 (i) 部分一樣，選取 $|a|$ 最小的一組解，便得出矛盾，所以不存在非零整數解。

第 (iii) 部分

任何不是 3 的倍數的整數，都可以寫成 $3n \pm 1$，其中 n 為某個整數。那麼

$$(3n \pm 1)^2 = 9n^2 \pm 6n + 1 = 3\left(3n^2 \pm 2n\right) + 1,$$

即比 3 的某個倍數大 1。另一方面，3 的倍數的平方是 3 的倍數（事實上更是 9 的倍數）。

因此每個平方數除以 3 的餘數是 0 或 1，而餘數為 0 當且僅當該數本身是 3 的倍數。對於 x^2+y^2，可能的餘數是

$$0+0=0, \qquad 0+1=1, \qquad 1+1=2.$$

所以 x^2+y^2 是 3 的倍數，僅當兩個餘數都是 0，亦即僅當 x 和 y 都是 3 的倍數。

現在假設 $a^2+b^2=3c^2$，其中 a,b,c 為非零整數。右方是 3 的倍數，所以由剛證明的結果，$a=3p$ 及 $b=3q$。於是

$$9p^2+9q^2=3c^2 \quad \Longrightarrow \quad c^2=3\left(p^2+q^2\right).$$

所以 c^2 是 3 的倍數。由第一個結果，c 必定是 3 的倍數，否則 c^2 會比 3 的某個倍數大 1。設 $c=3r$：

$$9r^2=3\left(p^2+q^2\right) \quad \Longrightarrow \quad p^2+q^2=3r^2.$$

這是同一方程的非零整數解，且 $|p|<|a|$。選取 $|a|$ 最小的一組解，便得出與之前相同的矛盾，所以不存在非零解。

第 (iv) 部分

這裏我們以 4 為模（modulo）進行計算。偶數 $2m$ 的平方是 $4m^2\equiv 0$，而奇數 $2m+1$ 的平方是 $4m^2+4m+1\equiv 1 \pmod 4$。所以三個平方數之和的餘數，等於三項中奇數的個數（0、1、2 或 3）。它是 4 的倍數，僅當三個數都是偶數。

? **想一想** 若把 $a^2+b^2+c^2=4abc$ 中的所有數減半，會得回同一條方程嗎？

不會。若 $a=2p$、$b=2q$ 及 $c=2r$，方程變為 $4(p^2+q^2+r^2)=32pqr$，即 $p^2+q^2+r^2=8pqr$。係數加倍了。所以我們改為證明一個更強、而且在減半之下確實保持不變的命題：

命題。對任何整數 $k\geq 2$，都不存在非零整數使得 $a^2+b^2+c^2=2^kabc$。

假設存在。在所有這樣的解之中（$k\geq 2$ 可取任何值），選取 $|a|$ 盡可能小的一組。由於 $k\geq 2$，右方 2^kabc 是 4 的倍數。所以 $a^2+b^2+c^2$ 是 4 的倍數，由上面的說明，a、b 和 c 都是偶數：$a=2p$、$b=2q$、$c=2r$。於是

$$4\left(p^2+q^2+r^2\right)=2^k\cdot 8pqr \quad \Longrightarrow \quad p^2+q^2+r^2=2^{k+1}\,pqr.$$

這是一組非零整數解，其指數為 $k+1\geq 2$，且 $|p|<|a|$，與 a 的選取矛盾。所以命題成立。取 $k=2$ 的情況，即知不存在非零整數 a,b,c 使得 $a^2+b^2+c^2=4abc$。

驗算

- 以電腦搜尋所有滿足 $|a|, |b|, |c| \leq 40$ 的非零 a, b, c，四條方程都找不到任何解，對 $2 \leq k \leq 6$ 的 $a^2 + b^2 + c^2 = 2^k abc$ 亦然。
- 令第 (iv) 部分得以成立的，正是係數中 2 的冪。某些這種形式的方程*確實*有解，例如 $1^2 + 1^2 + 1^2 = 3 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1$ 及 $3^2 + 3^2 + 3^2 = 1 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3$。在這些例子中係數是奇數，所以模 4 的論證無從入手。
- 試把遞降法套用在一個「差一點」的例子上：$a^2 + b^2 = 3c^2$ 在 $(a, b, c) = (1, 1, 1)$ 時不成立，因為 $1 + 1 = 2$ 不是 3 的倍數，這正是第 (iii) 部分中「$1 + 1 = 2$」的情況。

常見錯誤

- 忘記說明遞降為何導致矛盾。「我們得到更小的解」並不構成證明，除非你引用最小解（或正整數不可能無止境遞減這一事實）。
- 在第 (iv) 部分把數減半後，聲稱方程不變。事實並非如此：係數加倍了，這正是命題必須加強的原因。
- 寫「$3 \mid c^2$ 所以 $3 \mid c$」而不給理由。這裏的理由是第 (iii) 部分的第一個結果（更一般地說，因為 3 是質數）。

STEP 之外

費馬正是用無窮遞降法證明 $x^4 + y^4 = z^2$ 沒有正整數解，從而解決了他的最後定理（費馬大定理，Last Theorem）中 $n = 4$ 的情況。這裏的每一次遞降，實際上都等於證明：以某個適當的質數冪為模時，方程沒有變量不全被該質數整除的解。這是邁向 p 進數（p-adic numbers）以及現代數論中局部—整體（local–global）思想的第一步。著名的方程 $a^2 + b^2 + c^2 = 3abc$（馬爾可夫方程（Markov equation））有無窮多組解，它們由一個優美的樹狀結構生成。Davenport 的 *The Higher Arithmetic*（《高等算術》）正好以這個程度講解遞降法、同餘（congruence）和平方和。

Beyond STEP 詳細解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hant/。解答文字採用 CC0 1.0；題目本身版權屬 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予轉載。由機器從英文翻譯而成；尚未經審閱。