詳細解答

STEP III 2022，第 12 題

概率與統計 • 圓的隨機弦

STEP III 2022，第 12 題

繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 OCR 提供下載的 2022 年 STEP 試卷（zip 檔案）內的 STEP III 試卷：

www.ocr.org.uk/Images/696587-2022-past-papers.zip

本題在 *Beyond STEP* 第 12.3 節「隨機」是甚麼意思？中有完整的引導式講解：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hant/ch12/bertrand.html

關鍵思路

本題中所有的弦都源自同一個事實：在半徑為 a 的圓中，與圓心的垂直距離為 d 的弦（chord），長度為 $2\sqrt{a^2-d^2}$。因此要做的，就是用隨機量把 d 表示出來，然後求平均。在第 (ii) 部分，代換（substitution）$u = a^2 - r^2\sin^2 t$ 是很自然的選擇，因為 R 的概率密度（probability density）恰好提供了這個代換所需要的因子 r。

解答

第 (i) 部分

設 Θ 為角 AOB，則 Θ 在 $[0, 2\pi]$ 上均勻分佈（uniformly distributed），密度為 $\frac{1}{2\pi}$。三角形 AOB 是頂角為 Θ 的等腰三角形。從 O 向 AB 作垂線，這條垂線同時平分頂角和弦，所以

$$AB = 2a\sin\tfrac{1}{2}\Theta.$$

這對所有 $\Theta \in [0, 2\pi]$ 都成立，因為在這個範圍內 $\sin\frac{1}{2}\Theta \geq 0$；當 $\Theta > \pi$ 時，我們量度的是優角（reflex angle），但弦是同一條。因此

$$\mathrm{E}(AB) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} 2a\sin\tfrac{1}{2}\theta\,\mathrm{d}\theta = \frac{a}{\pi}\Big[-2\cos\tfrac{1}{2}\theta\Big]_0^{2\pi} = \frac{a}{\pi}(2+2) = \frac{4a}{\pi}.$$

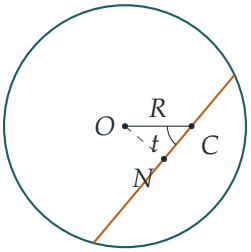
第 (ii) 部分

R **的密度**。對於 $0 \le r \le a$，事件 $R \le r$ 表示 C 落在以 O 為圓心、半徑為 r 的圓盤內。由於概率與面積成正比，

$$\mathrm{P}(R \le r) = \frac{\pi r^2}{\pi a^2} = \frac{r^2}{a^2}, \qquad \text{所以} \qquad f_R(r) = \frac{2r}{a^2} \quad (0 \le r \le a),$$

而在其他情況下 $f_R(r) = 0$。

弦的長度。設 N 為從 O 到弦的垂足。在直角三角形 ONC 中，斜邊是 $OC = R$，而在 C 處的角是 t，所以 $ON = R\sin t$。



從圓心所作的垂線平分弦，N 就是弦的中點，所以在由 O、N 和弦的一個端點組成的三角形中應用畢氏定理（Pythagoras' theorem），得

$$\text{弦長} = 2\sqrt{a^2 - R^2\sin^2 t}.$$

由於 $R < a$，根號內的式子是正數。注意這裡計算的是整條弦，包括 C 兩側的部分。

期望長度。固定 t，而 C 為隨機，

$$\mathrm{L}(t) = \int_0^a 2\sqrt{a^2 - r^2\sin^2 t}\,\frac{2r}{a^2}\,\mathrm{d}r.$$

取 $0 < t < \frac{1}{2}\pi$，使得 $\sin t \ne 0$。代入 $u = a^2 - r^2\sin^2 t$，則 $\mathrm{d}u = -2r\sin^2 t\,\mathrm{d}r$；當 $r = 0$ 時 $u = a^2$，當 $r = a$ 時 $u = a^2(1 - \sin^2 t) = a^2\cos^2 t$。於是

$$\mathrm{L}(t) = \frac{2}{a^2\sin^2 t}\int_{a^2\cos^2 t}^{a^2} u^{1/2}\,\mathrm{d}u = \frac{2}{a^2\sin^2 t}\cdot\frac{2}{3}\left(a^3 - a^3\cos^3 t\right) = \frac{4a(1-\cos^3 t)}{3\sin^2 t},$$

其中用到 $(a^2\cos^2 t)^{3/2} = a^3\cos^3 t$，這是成立的，因為對於銳角，$\cos t \ge 0$。這就是所求的公式。

> **想一想** 怎樣才能把分母 $\sin^2 t$ 化成可以與 $1 - \cos^3 t$ 約去的形式？

設 $c = \cos t$。那麼 $\sin^2 t = 1 - c^2 = (1-c)(1+c)$，而 $1 - c^3$ 是立方差（difference of cubes），即 $(1-c)(1+c+c^2)$。由於 $c \ne 1$，可以約去 $1 - c$：

$$\mathrm{L}(t) = \frac{4a}{3}\cdot\frac{1+c+c^2}{1+c} = \frac{4a}{3}\left(c + \frac{1}{1+c}\right),$$

因為 $c(1+c)+1 = 1+c+c^2$。最後，$1+\cos t = 2\cos^2 \frac{1}{2}t$，所以 $\dfrac{1}{1+\cos t} = \frac{1}{2}\sec^2 \frac{1}{2}t$，從而

$$\mathrm{L}(t) = \frac{4a}{3}\Big(\cos t + \tfrac{1}{2}\sec^2\big(\tfrac{1}{2}t\big)\Big),$$

即為所求。這個形式在 $t = 0$ 時沒有問題：它給出 $\frac{4a}{3}\cdot\frac{3}{2} = 2a$，這是正確的，因為沿 OC 方向經過 C 的弦就是直徑。

第 (iii) 部分

T 在 $[0, \frac{1}{2}\pi]$ 上的密度為 $\frac{2}{\pi}$，所以使用 L 的第二個形式（它很容易積分，因為 $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\tan\frac{1}{2}t = \frac{1}{2}\sec^2\frac{1}{2}t$），

$$\begin{aligned}\mathrm{E}\big(\mathrm{L}(T)\big) &= \frac{2}{\pi}\cdot\frac{4a}{3}\int_0^{\pi/2}\Big(\cos t + \tfrac{1}{2}\sec^2\tfrac{1}{2}t\Big)\,\mathrm{d}t = \frac{8a}{3\pi}\Big[\sin t + \tan\tfrac{1}{2}t\Big]_0^{\pi/2}\\ &= \frac{8a}{3\pi}(1+1) = \frac{16a}{3\pi}.\end{aligned}$$

驗算

- 當 $t = \frac{1}{2}\pi$ 時，弦垂直於 OC，而 $\mathrm{L} = \frac{4a}{3}(0+\frac{1}{2}\cdot 2) = \frac{4a}{3}$。直接計算，$\int_0^a 2\sqrt{a^2-r^2}\,\frac{2r}{a^2}\,\mathrm{d}r = \frac{4a}{3}$，結果相同。
- 當 t 由 0 增至 $\frac{1}{2}\pi$ 時，$\mathrm{L}(t)$ 應由 $2a$ 下降至 $\frac{4}{3}a$；而 (iii) 的答案 $\frac{16}{3\pi}a \approx 1.698a$ 正好介於兩者之間，平均值理應如此。
- 取 $a = 1.7$ 和 $t = 0.7$，將弦長乘以 R 的密度作數值積分，得 3.01799，與 $\mathrm{L}(0.7)$ 的兩條公式結果一致。(i) 的答案 $\frac{4}{\pi}a \approx 1.273a$ 亦已用數值積分核實。

常見錯誤

- 以為 R 在 $[0,a]$ 上均勻分佈。點是按面積均勻分佈的，而離圓心越遠，面積越多，因此密度是 $2r/a^2$。
- 只計算弦在 C 一側的部分，或者寫成 $ON = R\cos t$（那是沿弦方向的距離 CN）。
- 在第 (iii) 部分積分 $\mathrm{L}(t)$ 的第一個形式，而不是第二個形式；題目特意設計了第二個形式，讓你一行就能積分。

STEP 之外

這是幾何概率（geometric probability）：「隨機選取」只有在確定了分佈之後才有意義。答案 $\frac{4a}{\pi}$ 和 $\frac{16a}{3\pi}$ 之所以不同，是因為它們描述的是選取弦的不同方式，這正是貝特朗悖論（Bertrand's paradox）的要點。積分幾何（integral geometry）利用在旋轉和平移下保持不變的直線測度，把這類問題系統化。關於區域上的連續分佈以及本題這類期望值的計算，可參閱 Blitzstein 和 Hwang 的 *Introduction to Probability*（《概率導論》）。

Beyond STEP 詳細解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hant/。解答文字採用 CC0 1.0；題目本身版權屬 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予轉載。由機器從英文翻譯而成；尚未經審閱。