詳細解答

STEP III 2022，第 10 題

力學 • 彈簧的平衡

> **STEP III 2022，第 10 題**
>
> 繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 OCR 提供下載的 2022 年 STEP 試卷（zip 檔案）內的 STEP III 試卷：
>
> www.ocr.org.uk/Images/696587-2022-past-papers.zip

關鍵思路

由於 P 處的角是直角，兩條彈簧的拉力互相垂直。因此沿每條彈簧方向分解（resolve），便能各自單獨求出每個張力（tension），無須解聯立方程。至於能量方面，彈性勢能項與重力勢能項合併得出奇地簡潔，使 p 成為 θ 的一個簡單函數（function）。第 (ii) 部分真正的重點，其實在於 θ 所受的物理限制：兩條彈簧都必須處於伸長狀態。

解答

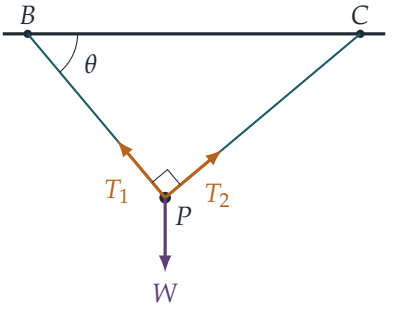
我們把 P 視為質點，並假設彈簧是輕的且遵守胡克定律（Hooke's law）。於是，一條彈性模量（modulus）為 λ、自然長度（natural length）為 a 的彈簧被拉長至長度 l 時，其張力為 $\lambda(l-a)/a$，所儲存的能量為 $\lambda(l-a)^2/(2a)$。

第 (i) 部分

由於 $BC = 2a$ 且角 $BPC = 90°$，三角形 BPC 的斜邊為 BC，所以

$$PB = 2a\cos\theta, \qquad PC = 2a\sin\theta, \qquad \angle PCB = 90° - \theta.$$

設 T_1 和 T_2 分別為 PB 和 PC 中的張力。



直線 PB 與水平方向成角 θ，所以它與鉛垂方向成角 $90^\circ - \theta$；同理，PC 與鉛垂方向成角 θ。由於 $PB \perp PC$，沿 PB 方向分解時只涉及 T_1 和重量，而重量沿 BP 方向（背離 B）的分量為 $W\cos(90^\circ - \theta) = W\sin\theta$。所以

$$T_1 = W\sin\theta, \qquad \text{同理，沿}PC, \qquad T_2 = W\cos\theta.$$

由胡克定律，

$$T_1 = \frac{s_1 W(2a\cos\theta - a)}{a} = s_1 W(2\cos\theta - 1), \qquad T_2 = s_2 W(2\sin\theta - 1).$$

令兩者相等，得

$$s_1 = \frac{\sin\theta}{2\cos\theta - 1}, \qquad s_2 = \frac{\cos\theta}{2\sin\theta - 1},$$

這就是所求的 s_1，並一併得出 s_2。

第 (ii) 部分

重力勢能。 P 位於 BC 下方，距離等於三角形從 P 出發的高，即 $PB\sin\theta = 2a\sin\theta\cos\theta = a\sin 2\theta$。以 BC 為零勢能水平，重力勢能（gravitational potential energy）為 $-Wa\sin 2\theta$。

彈性勢能。 PB 的伸長量（extension）為 $a(2\cos\theta - 1)$，因此利用第 (i) 部分，

$$\frac{s_1 W a^2(2\cos\theta - 1)^2}{2a} = \tfrac{1}{2}Wa\,s_1(2\cos\theta - 1)^2 = \tfrac{1}{2}Wa\sin\theta\,(2\cos\theta - 1),$$

同理，PC 中的能量為 $\frac{1}{2}Wa\cos\theta\,(2\sin\theta - 1)$。

*總和。*相加得

$$\begin{aligned} -paW &= -Wa\sin 2\theta + \tfrac{1}{2}Wa(2\sin\theta\cos\theta - \sin\theta + 2\sin\theta\cos\theta - \cos\theta) \\ &= -Wa\sin 2\theta + Wa\sin 2\theta - \tfrac{1}{2}Wa(\sin\theta + \cos\theta), \end{aligned}$$

所以

$$p = \tfrac{1}{2}(\sin\theta + \cos\theta) = \tfrac{\sqrt{2}}{2}\sin(\theta + \tfrac{\pi}{4}).$$

想一想 θ 可以是 0 與 $\frac{\pi}{2}$ 之間的任何值嗎？

不可以。模量 s_1W 和 s_2W 均為正數，而張力 $W\sin\theta$ 和 $W\cos\theta$ 亦為正數，所以兩條彈簧都必須處於伸長狀態：$2\cos\theta - 1 > 0$ 且 $2\sin\theta - 1 > 0$。（若其中一項為零，該彈簧便不會產生任何力，卻仍須提供非零的張力。）因此 $\cos\theta > \frac{1}{2}$ 且 $\sin\theta > \frac{1}{2}$，即

$$\tfrac{\pi}{6} < \theta < \tfrac{\pi}{3}, \qquad \text{故} \qquad \tfrac{5\pi}{12} < \theta + \tfrac{\pi}{4} < \tfrac{7\pi}{12}.$$

這個區間關於 $\frac{\pi}{2}$ 對稱。在此區間上，$\sin(\theta + \frac{\pi}{4})$ 最大為 1（在 $\theta = \frac{\pi}{4}$ 時取得），並嚴格大於它在端點的值 $\sin\frac{5\pi}{12} = \sin\frac{7\pi}{12}$。而

$$\sin\tfrac{5\pi}{12} = \sin(\tfrac{\pi}{4} + \tfrac{\pi}{6}) = \tfrac{\sqrt{2}}{2}\cdot\tfrac{\sqrt{3}}{2} + \tfrac{\sqrt{2}}{2}\cdot\tfrac{1}{2} = \frac{\sqrt{2}(\sqrt{3}+1)}{4},$$

所以

$$\tfrac{1}{2}\sqrt{2} \;\geq\; p \;>\; \tfrac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{\sqrt{2}(\sqrt{3}+1)}{4} = \tfrac{1}{4}(1+\sqrt{3}),$$

得證。

*一位有效數字。*我們需要 $0.65 \leq p < 0.75$，並以平方的方法來證明根式（surd）的估值。由於 $1.6^2 = 2.56 < 3$，得 $\sqrt{3} > 1.6$，所以 $p > \frac{1}{4}(2.6) = 0.65$。由於 $1.5^2 = 2.25 > 2$，得 $\sqrt{2} < 1.5$，所以 $p \leq \frac{1}{2}\sqrt{2} < 0.75$。因此，準確至一位有效數字（significant figure），$p = 0.7$。

驗算

- 當 $\theta = \frac{\pi}{4}$ 時，整個裝置是對稱的；事實上 $s_1 = s_2 = \frac{1}{\sqrt{2}-1} = \sqrt{2}+1$，且 $p = \frac{1}{2}\sqrt{2} \approx 0.7071$。
- 當 $\theta \to \frac{\pi}{6}^+$ 時，$s_1 \to \infty$：彈簧 PB 處於自然長度，必須無限堅硬才能承受張力。此時 $p \to \frac{1}{4}(1+\sqrt{3}) \approx 0.6830$，即下界。
- 我們用電腦對 $(\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{3})$ 中許多隨機的 θ 作驗證，確認所求得的位置是總勢能的駐點（stationary point）（因此確實是平衡位置（equilibrium）），而且能量等於 $-\frac{1}{2}Wa(\sin\theta + \cos\theta)$。

常見錯誤

- 把重力勢能寫成正號：P 位於零勢能水平的*下方*。
- 在整個 $(0, \frac{\pi}{2})$ 上求 $\frac{1}{2}(\sin\theta + \cos\theta)$ 的範圍，因而得出錯誤的下界 $\frac{1}{2}$；彈簧必須處於張緊狀態。
- 直接引用 $\sqrt{3} \approx 1.732$，卻沒有說明誤差不會影響捨入結果。

STEP 之外

第 (ii) 部分中的抵消並非巧合：在平衡位置，總勢能取駐值；而對於遵守胡克定律的彈簧，彈性勢能恰好是（張力 $\times$ 伸長量）的一半，這使它與克服重力所做的功緊密相連。把平衡位置視為勢能的駐點來研究，並透過二階導數（second derivative）判斷其穩定性（stability），是大學一年級力學的核心主題之一。Kleppner 與 Kolenkow 合著的 *An Introduction to Mechanics*（《力學導論》）對這種能量觀點有細緻的闡述。

Beyond STEP 詳細解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hant/。解答文字採用 CC0 1.0；題目本身版權屬 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予轉載。由機器從英文翻譯而成；尚未經審閱。