詳細解答

STEP III 2022，第 1 題

純數學 • 多項式的根

> **STEP III 2022，第 1 題**
>
> 繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 OCR 提供下載的 2022 年 STEP 試卷（zip 檔案）內的 STEP III 試卷：
>
> www.ocr.org.uk/Images/696587-2022-past-papers.zip

關鍵思路

把參數化（parametrisation）代入圓的方程，就能把「兩條曲線在哪裏相交？」轉化為「一個四次方程（quartic）的根是甚麼？」；此後一切都只靠根與係數的關係（relationships between roots and coefficients）完成，完全不必解這個四次方程。另一個有用的技巧是：倒數（reciprocals）$1/t_i$ 正是把同一個四次方程的係數倒序排列後所得方程的根。至於最後一部分，「相切」（touching）的意思就是有重根（repeated root）。

解答

第 (i) 部分

參數為 t 的點位於 C_2 上，當且僅當

$$(ct-a)^2+\left(\frac{c}{t}-b\right)^2=r^2.$$

展開得 $c^2t^2-2act+a^2+\dfrac{c^2}{t^2}-\dfrac{2bc}{t}+b^2=r^2$。由於 $t\neq 0$，我們可以乘以 t^2 而不會增加或失去任何解：

$$c^2t^4-2act^3+(a^2+b^2-r^2)t^2-2bct+c^2=0.$$

因此每個 t_i 都是 $(*)$ 的根。不同的 t 值給出不同的點（它們的 x 坐標 ct 各不相同），所以四個點 P_i 對應四個互不相同的參數。一個四次方程最多只有四個根，因此 $t_1,\ldots,t_4$ 恰好就是 $(*)$ 的全部根。

第 (ii) 部分

把 $(*)$ 除以 c^2，各根之和以及兩兩之積的和分別為

$$\sum t_i = \frac{2a}{c}, \qquad \sum_{i<j} t_i t_j = \frac{a^2+b^2-r^2}{c^2}.$$

利用 $(\sum t_i)^2 = \sum t_i^2 + 2\sum_{i<j} t_i t_j$，

$$\sum_{i=1}^{4} t_i^2 = \frac{4a^2}{c^2} - \frac{2(a^2+b^2-r^2)}{c^2} = \frac{2}{c^2}(a^2-b^2+r^2),$$

這正是所求的結果。

? **想一想** 怎樣才能求得 $\sum 1/t_i^2$，而不必處理繁複的公分母？

在 $(*)$ 中令 $u = 1/t$。由於常數項 $c^2 \neq 0$，沒有任何根為零，所以可以把 $(*)$ 除以 t^4：

$$c^2 - 2acu + (a^2+b^2-r^2)u^2 - 2bcu^3 + c^2u^4 = 0,$$

即 $c^2u^4 - 2bcu^3 + (a^2+b^2-r^2)u^2 - 2acu + c^2 = 0$。它的根就是各個 $1/t_i$。這正是把 $(*)$ 中的 a 與 b 互換所得的方程，所以同樣的計算給出

$$\sum_{i=1}^{4} \frac{1}{t_i^2} = \frac{2}{c^2}(b^2-a^2+r^2).$$

第 (iii) 部分

點 P_i 為 $(ct_i,\, c/t_i)$，所以 $OP_i^2 = c^2t_i^2 + \dfrac{c^2}{t_i^2}$。求和並利用第 (ii) 部分，

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{4} OP_i^2 &= c^2\sum t_i^2 + c^2\sum \frac{1}{t_i^2} \\ &= 2(a^2-b^2+r^2) + 2(b^2-a^2+r^2) \\ &= 4r^2,\end{aligned}$$

這就是所求的結果。留意圓心 (a,b) 已完全消失。

第 (iv) 部分

? **想一想** 以 $(*)$ 的根而言，「相切」是甚麼意思？

設 $f(t) = (ct-a)^2 + (c/t-b)^2 - r^2$，即動點到圓心距離的平方減去 r^2。曲線在參數 t_0 處與圓相切，當 $f(t_0) = 0$ 且 $f'(t_0) = 0$：該點在圓上，而且在一階近似下，它與圓心的

距離沒有改變，因此曲線在該處的方向垂直於半徑，也就是圓的切線方向。（這裏用到速度 $(c, -c/t^2)$ 永不為零這一事實。）$(*)$ 中的四次多項式就是 $t^2 f(t)$，而由於 $t_0 \neq 0$，f 在 t_0 有二重根當且僅當 $(*)$ 在 t_0 有二重根。

所以，若 C_1 與 C_2 在兩個不同的點相切，其參數為 $\alpha \neq \beta$，則 α 和 β 都是 $(*)$ 的二重根。這已涵蓋全部四個根，因此

$$c^2t^4 - 2act^3 + (a^2 + b^2 - r^2)t^2 - 2bct + c^2 = c^2(t-\alpha)^2(t-\beta)^2.$$

各根之積。比較常數項，$c^2\alpha^2\beta^2 = c^2$，所以 $(\alpha\beta)^2 = 1$，即 $\alpha\beta = \pm 1$。

各根之和。比較 t^3 項，$2(\alpha+\beta) = \dfrac{2a}{c}$，所以 $\alpha + \beta = \dfrac{a}{c}$。

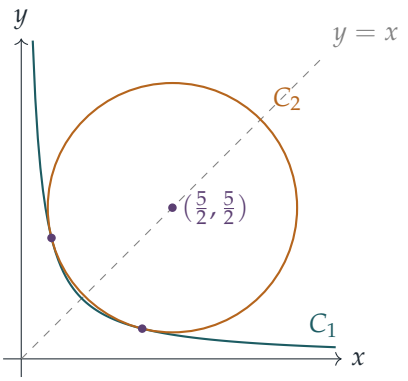
每三根之積的和。比較 t 項，$2\alpha\beta(\alpha+\beta) = \dfrac{2b}{c}$，所以 $\alpha\beta(\alpha+\beta) = \dfrac{b}{c}$。

把後兩式相除（或把第二式代入第三式），得 $b = \alpha\beta\, a$。因此

$$\alpha\beta = 1 \implies b = a, \qquad \alpha\beta = -1 \implies b = -a,$$

所以圓心 (a, b) 位於 $y = x$ 或 $y = -x$ 上。（若 $a = 0$，則 $b = 0$，圓心為原點，同時位於兩條直線上。）

下圖展示 $c = 1$、$\alpha = 2$、$\beta = \frac{1}{2}$ 的情況。比較係數得 $a = b = \frac{5}{2}$ 及 $r^2 = \frac{17}{4}$，而圓與雙曲線（hyperbola）相切於 $(2, \frac{1}{2})$ 和 $(\frac{1}{2}, 2)$。



驗算

- 在第 (iii) 部分，取以原點為圓心的圓 $x^2 + y^2 = r^2$，並設 $c = 1$ 及 $r^2 > 2$。由對稱性，四個交點為 $(p, q), (q, p), (-p, -q), (-q, -p)$，每點與原點的距離都是 r，所以總和確實是 $4r^2$。
- 在圖中的例子裏，$(\frac{5}{2}, \frac{5}{2})$ 到 $(2, \frac{1}{2})$ 距離的平方為 $\frac{1}{4} + 4 = \frac{17}{4} = 4.25$，正如所料。該處的半徑方向 $(-\frac{1}{2}, -2)$ 與曲線方向 $(1, -\frac{1}{4})$ 互相垂直，證實了相切。

- 第 (ii) 部分的公式已用電腦對數千個隨機的圓進行驗證，方法是以數值方法解該四次方程。

常見錯誤

- 弄錯 $\sum t_i t_j$ 的正負號。對於 $t^4 + pt^3 + qt^2 + \ldots$，各根之和是 $-p$，但兩兩之積的和是 $+q$。
- 在第 (iv) 部分只用了各根之積。這只給出 $\alpha\beta = \pm 1$，單憑這一點並不能說明 (a, b) 的任何性質。還需要再比較一個係數，才能把 a 和 b 引進來。
- 沒有說明為何「相切」會給出二重根。理由是條件 $f(t_0) = f'(t_0) = 0$，連同 $t_0 \neq 0$。

STEP 之外

根與係數之間的關係就是初等對稱函數（elementary symmetric functions）。一條經典定理指出，各根的任何對稱多項式（symmetric polynomial），例如 $\sum t_i^2$ 或 $\sum t_i^{-2}$，都可以用係數表示。倒數代換 $u = 1/t$ 讓我們初步窺見射影（projective）幾何的思想；而一條圓錐曲線（conic）與一個圓最多相交於四點，這是關於平面曲線相交的貝祖定理（Bézout's theorem）的特例。如想進一步了解多項式及其根，可參閱 Allenby, *Rings, Fields and Groups*（《環、域與羣》）；如想多做這類風格的練習，可參閱 Siklos, *Advanced Problems in Mathematics*（《高等數學問題》）。

Beyond STEP 詳細解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hant/。解答文字採用 CC0 1.0；題目本身版權屬 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予轉載。由機器從英文翻譯而成；尚未經審閱。