詳細解答

STEP II 2022，第 9 題

力學 • 摩擦力與力矩

STEP II 2022，第 9 題

繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 OCR 提供下載的 2022 年 STEP 試卷（zip 檔案）內的 STEP II 試卷：

www.ocr.org.uk/Images/696587-2022-past-papers.zip

關鍵思路

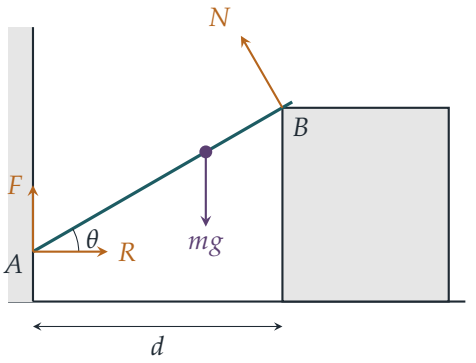
木板是輕的，所以只有三樣東西作用於它：質點、棱柱邊緣處的反作用力（reaction），以及牆壁。對木板與牆壁的接觸點取力矩（moments），可以一次過消去牆壁的兩個力，並立即得出邊緣處的反作用力。然後沿鉛垂方向分解（resolve）便得出摩擦力（friction），而之後每一部分都只是把摩擦不等式 $|F| \leq \mu R$ 重新整理而已。

解答

模型。木板是一根輕剛性桿，質量是一個重量為 mg 的質點，棱柱的邊緣是光滑的，而牆壁是粗糙的，摩擦系數（coefficient of friction）為 μ。設 A 為木板與牆壁的接觸點，B 為木板擱在邊緣上的點。由於 B 與牆壁的水平距離為 d，

$$AB = d\sec\theta.$$

在 B 處木板擱在一條邊緣上，所以光滑反作用力 N 垂直於木板。在 A 處，牆壁提供水平的法向反作用力 R 和鉛垂的摩擦力 F，我們取向上為正（F 為負即表示它向下作用）。



對 A 取力矩。牆壁的兩個力都通過 A。重量作用於沿木板距離 x 處，所以其力臂為 $x\cos\theta$；N 在距離 $d\sec\theta$ 處垂直於木板：

$$N\,d\sec\theta = mg\,x\cos\theta \quad\Longrightarrow\quad N = \frac{mg\,x\cos^2\theta}{d}.$$

分解。N 的方向與鉛垂線成角 θ，並向牆壁傾斜。沿水平及鉛垂方向，

$$R = N\sin\theta = \frac{mg\,x\cos^2\theta\sin\theta}{d},$$
$$F = mg - N\cos\theta = mg\left(1 - \frac{x\cos^3\theta}{d}\right).$$

注意 $R > 0$，所以木板確實壓在牆壁上。

第 (i) 部分

若 $x = d\sec^3\theta$，則 $x\cos^3\theta/d = 1$，所以 $F = 0$：牆壁處沒有摩擦力作用。

第 (ii) 部分

在有摩擦的情況下，平衡（equilibrium）要求 $|F| \le \mu R$。

若 $x > d\sec^3\theta$，則 $x\cos^3\theta/d > 1$，所以 $F < 0$（摩擦力向下作用；沒有它的話，端點 A 會沿牆壁向上滑）。條件 $-F \le \mu R$ 即為

$$mg\left(\frac{x\cos^3\theta}{d} - 1\right) \le \mu\,\frac{mg\,x\cos^2\theta\sin\theta}{d}.$$

乘以正數 $d\sec^3\theta/(mg)$，得

$$x - d\sec^3\theta \le \mu\,x\tan\theta, \qquad \text{因此} \qquad \mu \ge \frac{x - d\sec^3\theta}{x\tan\theta},$$

這裏除以了 $x\tan\theta > 0$（因為 θ 是銳角）。這就是所求的結果。

若 $x < d\sec^3\theta$，則 $F > 0$，而條件 $F \le \mu R$ 同樣地變成

$$\mu \ge \frac{d\sec^3\theta - x}{x\tan\theta}.$$

想一想 摩擦力向哪個方向作用？我們怎樣不靠猜測就知道？

我們不需要猜。取 F 向上為正，鉛垂方程便會告訴我們它的正負號。摩擦力總可以寫成 $|F| \le \mu R$，而 F 的正負號只是決定我們得到兩個不等式中的哪一個。

第 (iii) 部分

(ii) 的兩種情況都是說 $|x - d\sec^3\theta| \le \mu x\tan\theta$，這等同於以下兩式同時成立：

$$x - d\sec^3\theta \le \mu x\tan\theta \qquad 及 \qquad d\sec^3\theta - x \le \mu x\tan\theta.$$

第二式給出 $d\sec^3\theta \le x(1+\mu\tan\theta)$。由於 $1+\mu\tan\theta > 0$，

$$\frac{x}{d} \ge \frac{\sec^3\theta}{1+\mu\tan\theta}.$$

第一式給出 $x(1-\mu\tan\theta) \le d\sec^3\theta$。若 $\mu < \cot\theta$，則 $\mu\tan\theta < 1$，所以 $1-\mu\tan\theta > 0$，我們可以相除而不必反轉不等號：

$$\frac{x}{d} \le \frac{\sec^3\theta}{1-\mu\tan\theta}.$$

（若 $\mu \ge \cot\theta$，則沒有上界：無論質量位於木板上多高的位置，摩擦力都能把它承住。）

第 (iv) 部分

質量位於牆壁與邊緣之間，當且僅當 $x < AB = d\sec\theta$。結合 (iii) 的下界，

$$\frac{d\sec^3\theta}{1+\mu\tan\theta} \le x < d\sec\theta.$$

除以 $d\sec\theta > 0$ 並乘以 $1+\mu\tan\theta > 0$，

$$\sec^2\theta < 1+\mu\tan\theta \quad\Longleftrightarrow\quad \tan^2\theta < \mu\tan\theta,$$

這裏用了 $\sec^2\theta = 1+\tan^2\theta$。由於 $\tan\theta > 0$，我們可以除以它，得 $\tan\theta < \mu$，正如所求。

驗算

- 取 $\theta = 45°$、$d = 1$ 及 $\mu = 0.5$。則 $\sec^3\theta = 2\sqrt{2} \approx 2.83$，而 (iii) 容許 $1.89 \le x \le 5.66$。例如在 $x = 2$ 處，$F = mg(1 - 2/2\sqrt{2}) \approx 0.29mg$，$N = mg$，$R = mg/\sqrt{2}$，

而 $\mu R \approx 0.35mg$，所以平衡成立。這時質量位於邊緣之外（$AB = \sqrt{2}$），與 (iv) 一致，因為 $\tan 45^\circ = 1 > \mu$。

- 極限情況 $\mu = 0$（光滑牆壁）：(iii) 中的上下界收縮為 $x = d\sec^3\theta$，即 (i) 中唯一的位置。
- 以電腦對大量隨機的 θ、d、μ 及 x 值進行檢驗，確認各力平衡（包括對其他點取力矩），並且 $|F| \le \mu R$ 成立當且僅當 (iii) 的不等式成立。

常見錯誤

- 把邊緣處的反作用力當作鉛垂。木板是擱在一條邊緣上，所以光滑反作用力垂直於木板，而不是垂直於棱柱的頂面。
- 在力矩方程中，以 d 而非 $d\sec\theta$ 作為距離 AB。
- 把 $x(1-\mu\tan\theta) \le d\sec^3\theta$ 相除時，沒有檢查 $1-\mu\tan\theta$ 的正負號；這正是條件 $\mu < \cot\theta$ 出現的原因。

STEP 之外

這塊木板是靜定的（statically determinate）：三個未知反作用力，三條平衡方程，所以摩擦力被完全確定。若再加一個支點，方程便不再能確定各力；這時工程師會引入樑的彈性來決定負荷如何分配。(iii) 中的上下界是「平衡區域」的一個小例子，這個主題在穩定性的研究中會再次出現。Kleppner 和 Kolenkow 的 *An Introduction to Mechanics*（《力學導論》）對剛體靜力學和摩擦有細緻的論述。

Beyond STEP 詳細解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hant/。解答文字採用 CC0 1.0；題目本身版權屬 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予轉載。由機器從英文翻譯而成；尚未經審閱。