詳細解答

STEP II 2022，第 8 題

純數學 • 矩陣的不變直線

STEP II 2022，第 8 題

繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 OCR 提供下載的 2022 年 STEP 試卷（zip 檔案）內的 STEP II 試卷：

www.ocr.org.uk/Images/696587-2022-past-papers.zip

關鍵思路

一條穿過原點的直線，如果線上每一點都被映射到同一條直線上的點，這條直線就是不變直線（invariant line）；因此只需看一個方向向量（direction vector）被映射到哪裏便足夠。把直線寫成 $y = mx$，並要求 $\mathbf{M}\binom{1}{m}$ 是 $\binom{1}{m}$ 的倍數，整個問題就化為一個關於 m 的二次方程（quadratic equation）。之後，第 (ii) 和第 (iii) 部分都是關於這個方程兩根之和與兩根之積的問題；而鉛垂線沒有斜率（gradient），每次都需要另行處理。

解答

第 (i) 部分

考慮直線 $y = mx$，其方向為 $\binom{1}{m}$。它的像是

$$\mathbf{M}\begin{pmatrix}1\\m\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}a+bm\\c+dm\end{pmatrix}.$$

由於 $\mathbf{M}$ 是線性（linear）的，這條直線是不變直線，當且僅當這個像位於 $y = mx$ 上，即當且僅當

$$c + dm = m(a + bm) \quad \Longleftrightarrow \quad bm^2 + (a-d)m - c = 0.$$

所以每條非鉛垂的不變直線，其斜率都滿足這個方程；而方程的每個根都給出一條不變直線。

在把斜率稱為「兩個根」之前，我們必須先確認這真的是一個二次方程。y 軸的方向為 $\binom{0}{1}$，其像為 $\binom{b}{d}$；這個像位於 y 軸上，當且僅當 $b = 0$。所以如果兩條不變直線都不是 y 軸，則 $b \neq 0$。這時方程是真正的二次方程，最多只有兩個根。兩條不變直線都不是鉛

垂線，而且斜率不同，所以它們的斜率是兩個相異的根。這就表示它們的斜率正是方程的兩個根，得證。

如果其中一條不變直線是 y 軸，則 $b = 0$，方程退化為 $(a-d)m - c = 0$。由於 $a \neq d$（這正是用到這個條件的地方），另一條不變直線的斜率是

$$m = \frac{c}{a-d}.$$

第 (ii) 部分

情況 $b \neq 0$。設兩條直線的斜率為 m_1 和 m_2。由第 (i) 部分，

$$m_1 + m_2 = -\frac{a-d}{b}, \qquad m_1 m_2 = -\frac{c}{b}.$$

若兩條直線與 x 軸所成的角分別為 α_1 和 α_2，則

$$\tan(\alpha_1 - \alpha_2) = \frac{m_1 - m_2}{1 + m_1 m_2}.$$

兩直線之間的夾角為 45°，即上式等於 ± 1，所以 $(m_1 - m_2)^2 = (1 + m_1 m_2)^2$。把左邊寫成 $(m_1 + m_2)^2 - 4m_1 m_2$，得

$$\frac{(a-d)^2}{b^2} + \frac{4c}{b} = \left(1 - \frac{c}{b}\right)^2.$$

兩邊乘以 b^2，得 $(a-d)^2 + 4bc = (b-c)^2$，即

$$(a-d)^2 = (b-c)^2 - 4bc.$$

情況 $b = 0$。其中一條直線是 y 軸，另一條的斜率為 $c/(a-d)$。要使它與 y 軸成 45°，它的斜率必須是 ± 1，所以 $c = \pm(a-d)$，從而 $(a-d)^2 = c^2$。當 $b = 0$ 時，所求結果的右邊也等於 c^2，所以結果在這個情況下同樣成立。

第 (iii) 部分

> **想一想** 「與 $y = x$ 成相等的角」用斜率來說是甚麼意思？

兩條穿過原點的不同直線與 $y = x$ 成相等的角，當且僅當其中一條是另一條關於 $y = x$ 的鏡像（mirror image）。關於 $y = x$ 的反射會把坐標對調，因此它把 $y = mx$ 映射到 $x = my$；當 $m \neq 0$ 時，這就是 $y = \frac{1}{m}x$。它把 x 軸映射到 y 軸，並把 y 軸映射到 x 軸。

情況 $b \neq 0$。兩條直線都不是鉛垂線。如果其中一條的斜率為 0，它的鏡像便是 y 軸，而 y 軸並非不變直線，所以兩條直線不會對稱。除此以外，條件就是 $m_2 = 1/m_1$，即 $m_1 m_2 = 1$。由第 (i) 部分，這就是 $-c/b = 1$，即 $b + c = 0$。

情況 $b = 0$。其中一條直線是 y 軸，所以另一條必須是 x 軸：$c/(a-d) = 0$，即 $c = 0$。在 $b = 0$ 的前提下，這同樣就是條件 $b + c = 0$。

所以在所有情況下，充要條件都是

$$b + c = 0, \quad \text{即} \quad c = -b.$$

（當矩陣是對稱矩陣（symmetric matrix），即 $b = c$ 時，不變直線反而互相垂直。這裏則是兩個非對角元素互為相反數。）

第 (iv) 部分

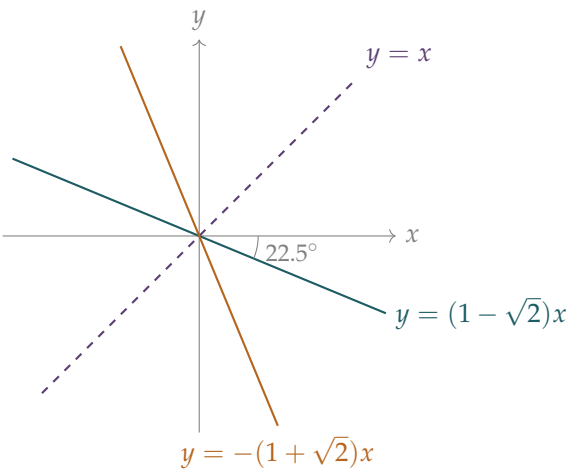
把 $c = -b$ 代入第 (ii) 部分的條件：

$$(a-d)^2 = (2b)^2 + 4b^2 = 8b^2.$$

我們需要 $b \neq 0$：若 $b = c = 0$，則 $(a-d)^2 = 0$，與 $a \neq d$ 矛盾。取 $b = 1$、$c = -1$ 及 $a - d = 2\sqrt{2}$，例如 $a = \sqrt{2}$、$d = -\sqrt{2}$：

$$\mathbf{M} = \begin{pmatrix} \sqrt{2} & 1 \\ -1 & -\sqrt{2} \end{pmatrix}.$$

第 (i) 部分的二次方程是 $m^2 + 2\sqrt{2}\,m + 1 = 0$，有相異實根 $m = -\sqrt{2} \pm 1$。所以這個矩陣恰好有兩條不變直線，與題目的假設相符。兩根之積為 1，所以兩條直線關於 $y = x$ 互為鏡像。由於 $\tan 22.5° = \sqrt{2} - 1$ 及 $\tan 67.5° = \sqrt{2} + 1$，它們與 x 軸所成的角分別為 $-22.5°$ 和 $-67.5°$。因此兩條直線相交成 45°，而每條都與 $y = x$ 成 67.5°。



驗算

- 對於第 (iv) 部分的例子，$(a-d)^2 = 8$，而 $(b-c)^2 - 4bc = 4+4 = 8$，所以第 (ii) 部分的條件成立。我們也可以直接驗證其中一條直線：$\mathbf{M}\begin{pmatrix}1\\1-\sqrt{2}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\sqrt{2}+1-\sqrt{2}\\-1-\sqrt{2}+2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\1-\sqrt{2}\end{pmatrix}$，所以 $y=(1-\sqrt{2})x$ 上的每一點其實都是不動點。
- 第 (i) 部分的一個簡單特例：對於 $\mathbf{M} = \begin{pmatrix}2&0\\0&1\end{pmatrix}$，不變直線就是兩條坐標軸。$y$ 軸情況的公式給出另一條直線的斜率為 $0/(2-1)=0$，正確無誤。
- 第 (i) 至 (iii) 部分已用電腦以數以千計的隨機矩陣驗證：特徵向量的方向滿足該二次方程，成 45° 的直線對滿足該恆等式，而且兩條直線關於 $y=x$ 對稱，當且僅當 $b+c=0$。

常見錯誤

- 忘記鉛垂線。二次方程只能反映斜率，所以每一部分都必須另行處理 $b=0$ 的情況。
- 在第 (iii) 部分寫成 $m_1 = -m_2$。這是關於坐標軸的對稱。關於 $y=x$ 的對稱需要 $m_1 m_2 = 1$。
- 使用 $\tan\theta = 1$ 而漏掉 $\pm$。把式子平方成 $(m_1-m_2)^2 = (1+m_1m_2)^2$，便可同時處理兩個符號。

STEP 之外

穿過原點的不變直線，就是 $\mathbf{M}$ 的*特徵向量*（eigenvector）方向；而第 (i) 部分的二次方程，就是把特徵向量方程 $\mathbf{Mv} = \lambda\mathbf{v}$ 中的 λ 消去後所得的結果。實對稱矩陣的特徵向量必定互相垂直（譜定理（spectral theorem））。這道題則展示了反對稱的非對角元素如何令特徵向量反而關於 $y=x$ 對稱。Strang 的 *Introduction to Linear Algebra*（《線性代數導論》）對特徵向量和譜定理有系統的講解。

Beyond STEP 詳細解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hant/。解答文字採用 CC0 1.0；題目本身版權屬 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予轉載。由機器從英文翻譯而成；尚未經審閱。